Научная статья
УДК 512.54
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-62-98

СТРОЕНИЕ НОРМАЛИЗАТОРОВ МАКСИМАЛЬНЫХ ТОРОВ В ГРУППАХ ЛИЕВА ТИПА

Алексей Альбертович Гальт

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
630090, Новосибирск, Россия

galt84@gmail.com; https://orcid.org/0000-0002-0788-5871

Аннотация

Основной целью данной работы является обзор результатов о строении нормализаторов максимальных торов в группах лиева типа. В частности, приводятся результаты о расщепляемости нормализаторов максимальных торов, а в случае исключительных групп — результаты о минимальных порядках поднятий элементов группы Вейля в соответствующих нормализаторах.

Ключевые слова и фразы

конечная группа лиева типа, линейная алгебраическая группа, группа Вейля, максимальный тор, алгебраический нормализатор, расщепляемость.

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (тема FWNF-2022-0002)

Для цитирования

Гальт А. А. Строение нормализаторов максимальных торов в группах лиева типа // Математические труды, 2024, Т. 27, № 2, С. 62-98. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-62-98

STRUCTURE OF NORMALIZERS OF MAXIMAL TORI IN GROUPS OF LIE TYPE

Alexey A. Galt

Sobolev Institute of Mathematics,Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
630090, Novosibirsk, Russia

galt84@gmail.com; https://orcid.org/0000-0002-0788-5871

Abstract

The main goal of this work is to review results on the structure of normalizers of maximal tori in groups of Lie type. In particular, we present results on splitting of normalizers of maximal tori, and in the case of exceptional groups, results on the minimal orders of lifts of elements of the Weyl group in the corresponding normalizers.

Keywords

finite group of Lie type, linear algebraic group, Weyl group, maximal torus, algebraic normalizer, splitting.

Funding

The research was carried out within the framework of the Sobolev Institute of Mathematics state contract (project FWNF-2022-0002)

For citation

Galt A. A. Structure of normalizers of maximal tori in Lie type groups// Mat. Trudy, 2024, V. 27, no. 2, pp. 62-98. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-62-98

§ 1. Введение

Конечные группы лиева типа G имеют тесную связь с простыми связными линейными алгебраическими группами $\overline{G}$, определенными над алгебраическим замыканием простого поля положительной характеристики. Они возникают из линейных алгебраических групп как множество неподвижных точек эндоморфизма Стейнберга. Важную роль как в линейных алгебраических группах, так и в конечных группах лиева типа играют максимальные торы. В частности, они фигурируют в теории представлений групп лиева типа и занимают центральное место в теории Каждана-Люстига (см. [1]). Кроме того, они возникают при исследовании различных задач, связанных с подгрупповым строением, поскольку каждый полупростой элемент группы лиева типа содержится в некотором максимальном торе.

Изучению максимальных торов посвящено большое количество работ различных авторов. Основополагающие результаты о строении максимальных торов были получены Р. Картером в работах [2] и [3]. Циклическое строение максимальных торов во всех простых классических группах описано в [4]. В случае исключительных групп лиева типа необходимо выделить работы о строении максимальных торов в группах лиева типа E_6, E_7, E_8 [5] и группах ${}^3D_4(q)$ [6] соответственно. Максимальные торы в исключительных группах лиева типа F_4 обсуждаются в работах [7], [8], [9] и [10]. Также отметим работы [11–13] и диссертацию [14] о максимальных торах в конечных группах лиева типа.

Напомним определение одного из основных понятий, используемых в работе. Пусть A — нормальная подгруппа в группе G. Подгруппа B группы G называется *дополнением* к A в G, если $G = AB$ и $A \cap B = 1$. В этом случае мы также говорим, что группа G *расщепляется над* A.

Хорошо известно, что все максимальные торы $\overline{T}$ группы $\overline{G}$ сопряжены в ней [15, следствие 6.5] и факторгруппа $N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$ изоморфна группе Вейля W группы $\overline{G}$. Задача о расщепляемости нормализатора максимального тора впервые была сформулирована в работе Ж. Титса [16].

Проблема 1 (Ж. Титс). *Описать группы $\overline{G}$, в которых $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ расщепляется над $\overline{T}$.*

В случае связных групп Ли сформулированная проблема была решена в работе [17]. При переходе к конечным группам G лиева типа возникает аналогичный вопрос. А именно, пусть $\overline{T}$ — максимальный σ-инвариантный тор группы $\overline{G}$, $T = \overline{T} \cap G$ — максимальный тор группы G и $N(G,T) = N_{\overline{G}}(\overline{T}) \cap G$ — алгебраический нормализатор. Известно, что в случае конечных групп максимальные торы не обязаны быть сопряженными в группе G.

Проблема 2. *Описать группы G и их максимальные торы T, в которых $N(G,T)$ расщепляется над T.*

Отметим, что $N(G,T) \leqslant N_G(T)$, но равенство, вообще говоря, может не достигаться (см. раздел параграф 2). Следуя [18], прообраз элемента группы Вейля W в $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ будем называть *поднятием*. Для алгебраической группы $\overline{G}$ положительный ответ на проблему 1, в частности означает, что любой элемент из W имеет поднятие в $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ такого же порядка. Естественно рассмотреть вопрос о минимальном порядке поднятия элемента группы Вейля в $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ в нерасщепляемом случае. В работе [18] отмечено, что если порядок элемента w из группы Вейля равен d, то минимальный порядок поднятия для w равен либо d, либо $2d$. В работе [19] были рассмотрены эллиптические элементы группы Вейля, то есть элементы, не имеющие собственных значений 1 в естественном представлении. В частности, было доказано, что минимальный порядок поднятий для таких элементов равен d, за исключением простых алгебраических групп типа C_n или F_4. Результаты для так называемых регулярных элементов группы Вейля можно найти в работах [18] и [20]. Отметим, что в работах [21] и [22] изучались поднятия инволюций группы Вейля в нормализаторе максимального тора.

Вопрос о минимальном порядке поднятия элемента группы Вейля представляется естественным и для конечных групп лиева типа G. Если порядок элемента w из группы Вейля равен d и в группе G минимальный порядок его поднятия в $N(G,T)$ равен d, то в соответствующей группе $\overline{G}$ минимальный порядок его поднятия в $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ также равен d.

Таблица 1: Дополнения в алгебраических группах

Группа	Дополнение
$\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$	$p = 2$ или n – нечетно
$\mathrm{PSL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$	$+$
$\mathrm{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$	$p = 2$
$\mathrm{PSp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$	$p = 2$ или $n \leqslant 2$
$\mathrm{SO}_{2n+1}(\overline{\mathbb{F}}_p)$	$+$
$\mathrm{SO}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$	$+$
$\mathrm{PSO}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$	$+$
$G_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$	$+$
$F_4(\overline{\mathbb{F}}_p)$	$p = 2$
$E_6(\overline{\mathbb{F}}_p)$	$p = 2$
$E_7(\overline{\mathbb{F}}_p)$	$p = 2$
$E_8(\overline{\mathbb{F}}_p)$	$p = 2$

В данной работе приводится обзор результатов, которые дают ответ на проблему Ж. Титса 1 и проблему 2.

Критерий расщепляемости нормализатора максимального тора в простой алгебраической группе приведен в следующей теореме.

Теорема 1.1. *Пусть $\overline{G}$ — простая связная алгебраическая группа над полем $\overline{\mathbb{F}}_p$, приведенная в таблице 1, и $\overline{T}$ — максимальный тор группы $\overline{G}$. Тогда $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ расщепляется над $\overline{T}$ в том и только в том случае, если $\overline{G}$ удовлетворяет условию в таблице 1.*

Символ «$+$» в таблице 1 означает, что дополнение для максимального тора всегда существует.

Итоговый результат о расщепляемости нормализатора максимального тора в конечных группах лиева типа можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1.2. *Пусть G — конечная простая группа лиева типа и T — максимальный тор группы G. Предположим, что алгебраический нормализатор $N(G, T)$ расщепляется над T. Тогда пара (G, T) описана.*

Конкретные результаты теоремы 1.2 приведены в соответствующих параграфах. Кроме этого, для исключительных групп лиева типа (односвязных и присоединенного типа) приводятся минимальные порядки поднятий элементов группы Вейля в алгебраических нормализаторах.

Данная работа организована следующим образом. В параграфе 2 мы напоминаем обозначения и общие факты. Параграф 3 содержит результаты, отвечающие на проблемы 1 и 2 для классических групп. Параграф 4 посвящен результатам в исключительных группах лиева типа. В нем даны ответы на проблемы 1 и 2 и указаны минимальные порядки поднятий элементов группы Вейля в алгебраических нормализаторах. В параграфе 5 приведены таблицы с результатами по проблеме 2 для исключительных групп лиева типа вместе с дополнительной информацией о максимальных торах. Наконец, открытые вопросы содержатся в параграфе 6.

§ 2. Предварительные сведения

Линейные алгебраические группы

Необходимую информацию о строении и свойствах линейных алгебраических групп можно найти в [23], о группах лиева типа — в [24, 25], о связи между группами лиева типа и линейными алгебраическими группами — в [1,15,24]. В этом разделе, если не оговорено особо, подразумевается, что алгебраические группы определены над некоторым алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$.

Тором алгебраической группы называется связная диагонализируемая (d-) группа (эквивалентно, подгруппа, изоморфная группе диагональных матриц $\mathrm{D}_n(\mathbb{F})$). Все максимальные торы алгебраической группы сопряжены [15, Следствие 6.5].

Если $\overline{G}$ — связная редуктивная алгебраическая группа, то пусть $\overline{T}$ — некоторый ее максимальный тор. *Рангом* связной алгебраической группы называется размерность ее максимального тора. Через $\Phi(\overline{G})$ обозначается корневая система группы $\overline{G}$ относительно максимального тора $\overline{T}$ (она не зависит от выбора максимального тора) и $W(\overline{G}) \simeq N_{\overline{G}}(\overline{T})/\overline{T}$ — *группа Вейля* группы $\overline{G}$.

Напомним, что для любой корневой системы Φ существует такой набор корней $r_1, \ldots, r_n$, что каждый корень из Φ единственным образом представляется в виде $\Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i r_i$, где все коэффициенты α_i целочисленные и одновременно либо неотрицательные, либо неположительные. Такой набор корней называется *фундаментальной системой* корневой системы Φ, а элементы из фундаментальной системы — *фундаментальными корнями.* При этом фундаментальная система является базисом пространства $\mathbb{Z}\Phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Размерность пространства $\mathbb{Z}\Phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ называется *рангом* корневой системы Φ. Отметим, что ранги группы $\overline{G}$ и ее корневой системы $\Phi(G)$ совпадают.

На $\mathbb{Z}\Phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ естественным образом определена структура евклидова пространства. Через w_r обозначается отражение относительно гиперплоскости, ортогональной корню r. *Группой Вейля* W корневой системы Φ называется группа, порожденная отражениями w_r по всем r из Φ. Известно, что группа Вейля корневой системы Φ порождается отражениями в фундаментальных корнях — *фундаментальными отражениями.* Через $l(w)$

обозначается длина элемента w, то есть минимальное количество множителей в разложении элемента w в произведение фундаментальных отражений. В группе Вейля существует единственный элемент максимальной длины, обозначаемый в дальнейшем через w_0, причем w_0 переводит все положительные корни в отрицательные.

Если $\overline{G}$ — связная редуктивная алгебраическая группа, $\overline{T}$ — ее максимальный тор и Φ — корневая система группы $\overline{G}$ относительно максимального тора $\overline{T}$, то $W(\overline{G}) \simeq W(\Phi)$ и мы будем отождествлять эти две группы.

Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа, π — ее некоторое точное рациональное представление, Γ_π — решетка, порожденная весами представления π. Через Γ_{ad} обозначается решетка, порожденная корнями системы Φ, через Γ_{sc} — решетка, порожденная фундаментальными весами. Решетки Γ_{sc}, Γ_π и Γ_{ad} не зависят от конкретного представления группы $\overline{G}$, и справедливы следующие включения $\Gamma_{ad} \leqslant \Gamma_\pi \leqslant \Gamma_{sc}$ (см. [23, 31.1]). Для корневой системы данного типа существует несколько различных простых алгебраических групп, которые называются *изогениями.* Они различаются строением группы Γ_π и порядком конечного центра. Если решетка Γ_π совпадает с решеткой Γ_{sc}, то говорят, что группа $\overline{G}$ *односвязна* и обозначают ее $\overline{G}^{sc}$. Если же Γ_π совпадает с Γ_{ad}, то говорят, что группа $\overline{G}$ имеет *присоединенный тип* и обозначают ее $\overline{G}^{ad}$. Любая простая связная линейная алгебраическая группа с корневой системой Φ может быть получена как факторгруппа группы $\overline{G}^{sc}$ по подгруппе из ее центра. Центр группы $\overline{G}^{ad}$ тривиален, и она проста как абстрактная группа. Факторгруппа Γ_{sc}/Γ_π называется *фундаментальной группой* группы $\overline{G}$ и обозначается через $\Delta(\overline{G})$. Факторгруппа Γ_{sc}/Γ_{ad} зависит только от корневой системы Φ и обозначается через $\Delta(\Phi)$. Хорошо известно, что $\Delta(\Phi)$ является циклической, за исключением корневой системы $\Phi = D_{2n}$, когда $\Delta(D_{2n}) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ является элементарной абелевой группой порядка 4 (см. [15, таблица 9.2]).

Пусть $\overline{B}$ — подгруппа Бореля группы $\overline{G}$, то есть максимальная связная разрешимая подгруппа. Пусть $\overline{T} \leqslant \overline{B}$ — максимальный тор группы $\overline{G}$ и $\overline{U} = R_u(\overline{B})$ — унипотентный радикал группы $\overline{G}$, то есть максимальная связная унипотентная подгруппа. Тогда $\overline{B} = \overline{TU}$. Существует единственная подгруппа Бореля $\overline{B}^-$ такая, что $\overline{B} \cap \overline{B}^- = \overline{T}$. Обозначим через $\overline{U}^- = R_u(\overline{B}^-)$ и рассмотрим множество минимальных подгрупп в группах $\overline{U}$ и $\overline{U}^-$, инвариантных относительно $\overline{T}$. Это множество находится во взаимно-однозначном соответствии с корнями корневой системы Φ. Элементы этого множества обозначаются через $X_r, r \in \Phi$ и называются *корневыми подгруппами.* Каждая группа X_r является связной унипотентной группой размерности 1, то есть изоморфна аддитивной группе поля $\mathbb{F}$. Элементы группы X_r записываются в виде $x_r(t), t \in \mathbb{F}$. При этом

$\overline{G} = \langle x_r(t) | r \in \Phi, t \in \mathbb{F} \rangle$. Определим элементы

$$n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t), \quad h_r(t) = n_r(t)n_r(1)^{-1}, r \in \Phi, t \in \mathbb{F}^*.$$

Тогда

$$\overline{T} = \langle h_r(t) | r \in \Phi, t \in \mathbb{F}^* \rangle, \quad N_{\overline{G}}(\overline{T}) = \langle n_r(t) | r \in \Phi, t \in \mathbb{F}^* \rangle.$$

Согласно [25, теорема 7.2.2] мы имеем следующие соотношения:

$$n_s n_r n_s^{-1} = n_{w_s(r)}(\eta_{s,r}), \quad \eta_{s,r} = \pm 1,$$

$$n_s h_r(\lambda) n_s^{-1} = h_{w_s(r)}(\lambda).$$

Для вычислений значения констант $\eta_{r,s}$ выбираются следующим образом. Пусть $r \in \Phi$ и $r = \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i r_i$. Напомним, что $h(r) = \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i$. В соответствии с [26], зафиксируем следующий полный порядок на множестве положительных корней: положим $r \prec s$, если либо $h(r) < h(s)$, либо $h(r) = h(s)$ и первая ненулевая координата вектора $s - r$ является положительной. Таблица положительных корней в соответствии с этим порядком может быть найдена в [26].

Напомним, что пара положительных корней (r, s) называется *специальной*, если $r + s \in \Phi$ и $r \prec s$. Пара (r, s) называется *экстраспециальной*, если она специальная и для любой специальной пары (r_1, s_1) такой, что $r + s = r_1 + s_1$, выполнено $r \preccurlyeq r_1$. Пусть $N_{r,s}$ – это структурные константы соответствующей алгебры Ли [25, раздел 4.1]. Тогда значения $N_{r,s}$ можно выбрать произвольным образом на множестве экстраспециальных пар, после чего все остальные структурные константы определены единственным образом в силу [25, предложение 4.2.2]. В нашем случае, мы выбираем $\operatorname{sgn}(N_{r,s}) = +$ для всех экстраспециальных пар (r, s). Значения всех структурных констант на всех парах может быть найдено в [26]. Числа $\eta_{r,s}$ однозначно определены по структурным константам в силу [25, предложение 6.4.3].

Конечные группы лиева типа

Пусть $\overline{G}$ — простая связная линейная алгебраическая группа над алгебраическим замыканием $\overline{\mathbb{F}}_p$ конечного поля $\mathbb{F}_p$. Отметим, что $Z(G)$ может быть нетривиальным. Сюръективный эндоморфизм σ группы $\overline{G}$ называется *эндоморфизмом Стейнберга* (см. [27, определение 1.15.1]), если множество его неподвижных точек $\overline{G}_\sigma$ конечно. Любую группу, удовлетворяющую условию $O^{p'}(\overline{G}_\sigma) \leqslant G \leqslant \overline{G}_\sigma$, будем называть *конечной группой лиева типа*. Если $\overline{G}$ является простой алгебраической группой присоединенного типа, то G также имеет *присоединенный тип*.

Если $O^{p'}(G)$ совпадает с одной из групп ${}^2A_n(q)$, ${}^2B_2(2^{2n+1})$, ${}^2D_n(q)$, ${}^3D_4(q)$, ${}^2E_6(q)$, ${}^2G_2(3^{2n+1})$, или ${}^2F_4(2^{2n+1})$, то группа G называется *скрученной*, в остальных случаях группа G называется *расщепленной*.

Иногда мы будем использовать обозначение $\Phi^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+,-\}$, и $\Phi^+(q) = \Phi(q)$ является расщепленной группой лиева типа, $\Phi^-(q) = {}^2\Phi(q)$ является скрученной группой лиева типа.

Если $\overline{T}$ — σ-инвариантный максимальный тор группы $\overline{G}$, то $T = \overline{T} \cap G$ называется *максимальным тором* группы G лиева типа. Группу $N_{\overline{G}}(\overline{T}) \cap G$ будем называть *алгебраическим нормализатором* тора T и обозначать через $N(G,T)$. Отметим, что справедливо включение $N(G,T) \leqslant N_G(T)$, но равенство, вообще говоря, может не достигаться. Например, если мы рассмотрим $G = \mathrm{SL}_n(2)$, то подгруппа диагональных матриц T группы G тривиальна, значит, $N_G(T) = G$. С другой стороны, $G = (\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_2))_\sigma$, где σ — эндоморфизм Стейнберга ($\sigma : (a_{i,j}) \mapsto (a_{i,j}^2)$). Тогда $T = \overline{T}_\sigma$, где $\overline{T}$ является подгруппой диагональных матриц в $\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_2)$. Таким образом, $N(G,T)$ является группой мономиальных матриц в G и $N(G,T) < N_G(T)$. В недавно вышедшей работе [28] найдены все конечные простые группы G лиева типа, для которых $N(G,T) < N_G(T)$.

В группе $\overline{G}$ всегда есть σ-инвариантный максимальный тор, который будем обозначать через $\overline{T}$, причем все максимальные торы сопряжены с $\overline{T}$ в $\overline{G}$. Для краткости мы иногда будем писать $\overline{N}$ вместо $N_{\overline{G}}(\overline{T})$. Через W обозначается группу Вейля $W(\overline{G}) \simeq \overline{N}/\overline{T}$, а через π — естественный гомоморфизм из $\overline{N}$ в W. Действие σ на W определяется естественным образом. Элементы $w_1, w_2 \in W$ называются *σ-сопряженными*, если $w_1 = (w^{-1})^\sigma w_2 w$ для некоторого элемента w из W.

Предложение 2.1. [1, предложения 3.3.1, 3.3.3].*Тор $\overline{T}^g$ является σ-инвариантным тогда и только тогда, когда $g^\sigma g^{-1} \in \overline{N}$. Отображение $\overline{T}^g \mapsto \pi(g^\sigma g^{-1})$ задает биекцию между G-классами σ-инвариантных максимальных торов группы $\overline{G}$ и классами σ-сопряженности группы W.*

Как следует, из предложения 2.1 строение тора $(\overline{T}^g)_\sigma$ группы G определяется только классом σ-сопряженности элемента $\pi(g^\sigma g^{-1})$. Будем говорить, что тор T группы G *соответствует элементу* w, если $T = (\overline{T}^g)_\sigma$ для некоторого $g \in \overline{G}$ такого, что $\pi(g^\sigma g^{-1}) = w$.

Предложение 2.2. [4, лемма 1.2].*Пусть $n = g^\sigma g^{-1} \in \overline{N}$ и $\pi(g^\sigma g^{-1}) = w$. Тогда $(\overline{T}^g)_\sigma = (\overline{T}_{\sigma n})^g$, где n действует на $\overline{T}$ сопряжением.*

Предложение 2.3. [1, предложение 3.3.6].*Пусть $n = g^\sigma g^{-1} \in \overline{N}$ и $\pi(g^\sigma g^{-1}) = w$. Тогда*

$$(N_{\overline{G}}(\overline{T}^g))_\sigma / (\overline{T}^g)_\sigma \simeq C_{W,\sigma}(w) = \{x \in W \mid x^{-1} w x^\sigma = w\}.$$

Согласно предложению 2.2, получаем, что $(\overline{T}^g)_\sigma = (\overline{T}_{\sigma n})^g$ и $(N_{\overline{G}}(\overline{T}^g))_\sigma = (\overline{N}^g)_\sigma = (\overline{N}_{\sigma n})^g$. Следовательно, $(\overline{T}^g)_\sigma$ имеет дополнение в своем алгебраическом нормализаторе тогда и только тогда, когда существует дополнение к группе $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.

Следующее замечание показывает, что расщепляемость алгебраического нормализатора не зависит от выбора тора, соответствующего элементу w.

Замечание 2.4. *Пусть n и w — элементы из предложения 2.3. Предположим, что $n_1 = g_1^{\sigma} g_1^{-1} \in \overline{N}$ и $\pi(n_1) = w$. Рассмотрим два максимальных тора $(\overline{T}^g)_\sigma$ и $(\overline{T}^{g_1})_\sigma$ группы G, соответствующие элементу w. Согласно предложению 2.1 существует элемент $x \in G$ такой, что $(\overline{T}^g)^x = \overline{T}^{g_1}$. Тогда*

$$(N_{\overline{G}}(\overline{T}^{g_1}))_\sigma = (N_{\overline{G}}(\overline{T}^{gx}))_\sigma = ((N_{\overline{G}}(\overline{T}^{g}))^x)_\sigma = ((N_{\overline{G}}(\overline{T}^{g}))_\sigma)^x,$$

где последнее равенство следует из того, что $x \in G = \overline{G}_\sigma$.

Таким образом, G-сопряженным максимальным торам соответствуют G-сопряженные алгебраические нормализаторы. Следовательно, при решении проблемы 2 можно выбирать удобного для вычислений представителя n_1 с условием $\pi(n_1) = w$.

Определим группы $\mathcal{T} = \langle n_r \mid r \in \Delta \rangle$ и $\mathcal{H} = \overline{T} \cap \mathcal{T}$. Согласно [16, §4.6] имеем $\mathcal{H} = \langle h_r \mid r \in \Delta \rangle$ и $\mathcal{T}/\mathcal{H} \simeq W$. В частности, в случае нечетного q группа $\mathcal{H}$ — элементарная абелева 2-группа.

Замечание 2.5. *Заметим, что, если $p = 2$, то $h_r = 1$ для всех $r \in \Delta$, в частности, $\mathcal{H} = 1$ и $\mathcal{T} \simeq W$. Более того, сужение $\tilde{\pi}$ гомоморфизма π на $\mathcal{T}$ — это изоморфизм между $\mathcal{T}$ и W. Пусть T — максимальный тор, соответствующий $w \in W$. Тогда $n = \tilde{\pi}^{-1}(w)$ – поднятие для w в $\overline{N}_{\sigma n}$ такого же порядка, и $\tilde{\pi}^{-1}(C_W(w))$ — дополнение для $\overline{T}_{\sigma n}$ в $\overline{N}_{\sigma n}$.*

Из данного замечания следует, что в случае четной характеричтики поля любой максимальный тор имеет дополнение в своем алгебраическом нормализаторе.

§ 3. Нормализаторы максимальных торов в классических группах

Данный параграф посвящен ответам на проблемы 1 и 2 для классических групп. Ответ на проблему Ж. Титса 1 для симплектических групп приведен в теореме 3.1, для линейных групп — в теореме 3.4, для ортогональных групп — в теореме 3.8.

Результаты по проблеме 2 для симплектических групп содержатся в теореме 3.2 и следствии 3.3, для линейных и унитарных групп — в теоремах 3.5 и 3.6, для ортогональных групп нечетной размерности — в теореме 3.9, для ортогональных групп четной размерности — в теоремах 3.10 и 3.11.

Симплектические группы

В случае симплектических групп ответ на проблему 1 содержится в следующей теореме.

Теорема 3.1. [29, теорема 1, следствие 1] *Пусть $\overline{T}$ — максимальный σ-инвариантный тор группы $\overline{G} = \mathrm{Sp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ и $\widetilde{T}$ — образ тора $\overline{T}$ в $\widetilde{G} = \mathrm{PSp}_{2n}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Тогда*

(1) *$\widetilde{T}$ имеет дополнение в $N_{\widetilde{G}}(\widetilde{T})$ в том и только в том случае, если $p = 2$ или $n \leqslant 2$;*

(2) *$\overline{T}$ имеет дополнение в $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ в том и только в том случае, если $p = 2$.*

Согласно предложению 2.1 при переходе к конечным группам G лиева типа существует взаимно-однозначное соответствие между классами G-сопряженных максимальных σ-инвариантных торов группы $\overline{G}$ и классами σ-сопряженности группы Вейля W. В случае симплектических групп классы σ-сопряженности группы W совпадают с обычными классами сопряженности.

Пусть $n = n' + n''$, а $n' = n_1 + \ldots + n_k$ и $n'' = n_{k+1} + \ldots + n_m$ — разбиения чисел n' и n'' соответственно. Всевозможные такие представления числа n в виде суммы $n = n_1 + \ldots + n_k + n_{k+1} + \ldots + n_m$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами сопряженности группы Вейля типа C_n. Мы отождествляем разбиения, отличающиеся перестановкой слагаемых внутри каждого из разбиений n' и n''. Если класс сопряженности соответствует представлению $n = n_1 + \ldots + n_k + n_{k+1} + \ldots + n_m$, то выражение $(\overline{n_1}) \ldots (\overline{n_k})(n_{k+1}) \ldots (n_m)$ называется циклическим типом этого класса.

Ответ на проблему 2 для симплектических групп содержится в следующих двух утверждениях.

Теорема 3.2. [29, теорема 2] *Пусть T — максимальный тор в группе $G = \mathrm{PSp}_{2n}(q)$, соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом $(\overline{n_1}) \ldots (\overline{n_k})(n_{k+1}) \ldots (n_m)$. Тогда T имеет дополнение в $N(G, T) = N_{\overline{G}}(\overline{T}) \cap G$ в том и только в том случае, если выполняется одно из следующих условий:*

(1) $p = 2$;

(2) $m = 1$;

(3) $m = 2, k = 2,$ *числа* n_1, n_2 *нечетны,* $q \equiv 3 \pmod 4$;

(4) $m = 2, k = 1,$ n_1 *нечетно,* n_2 *четно,* $q \equiv 3 \pmod 4$;

(5) $m = 2, k = 0,$ *числа* n_1, n_2 *четны,* $q \equiv 3 \pmod 4$;

(6) $m = 2, k = 0$, $q \equiv 1 \pmod 4$.

Следствие 3.3. [29, следствие 2] *Пусть T — максимальный тор в группе $G = \mathrm{Sp}_{2n}(q)$, соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом $(\overline{n_1})\ldots(\overline{n_k})(n_{k+1})\ldots(n_m)$. Тогда T имеет дополнение в $N(G,T)$ в том и только в том случае, если $p = 2$.*

Линейные и унитарные группы

В следующей теореме содержится ответ на проблему 1 для линейных групп.

Теорема 3.4. [30, теорема 1] *Пусть $\overline{T}$ — максимальный σ-инвариантный тор группы $\overline{G} = \mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$, $\widetilde{T}$ — образ тора $\overline{T}$ в $\widetilde{G} = \mathrm{PSL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Тогда*

(1) *$\widetilde{T}$ имеет дополнение в $N_{\widetilde{G}}(\widetilde{T})$;*

(2) *$\overline{T}$ имеет дополнение в $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ тогда и только тогда, когда $p = 2$ или n нечетно.*

Напомним, что согласно предложению 2.1 при переходе к конечным группам G лиева типа существует взаимно-однозначное соответствие между классами G-сопряженных максимальных σ-инвариантных торов группы $\overline{G}$ и классами σ-сопряженности группы Вейля W. Группа Вейля лиева типа A_n изоморфна симметрической группе Sym_n. Хорошо известно, что классы сопряженности в Sym_n однозначно определяются записью представителя в виде произведения независимых циклов, и поэтому находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями числа n, то есть представлениями n в виде суммы положительных целых чисел. Если $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ — какое-то разбиение, то выражение вида $(n_1)(n_2)\ldots(n_m)$ называется *циклическим типом* соответствующего класса сопряженности. Мы отождествляем разбиения, отличающиеся перестановкой слагаемых. Для разбиения $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ обозначим через b_i количество элементов разбиения, равных n_i и положим $a_i = n_i b_i$ для $1 \leqslant i \leqslant m$.

Ответ на проблему 2 для специальных линейных и унитарных групп $\mathrm{SL}_n^{\varepsilon}(q)$ получен в следующей теореме.

Теорема 3.5. [31, теорема 2] *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{SL}_n^{\varepsilon}(q)$, соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом $(n_1)(n_2)\ldots(n_m)$. Тогда T имеет дополнение в $N(G,T)$ тогда и только тогда, когда q четно или a_i нечетно для некоторого $1 \leqslant i \leqslant m$.*

При переходе к простым линейным и унитарным группам $\mathrm{PSL}_n^{\varepsilon}(q)$ ответ на проблему 2 дает следующее утверждение.

Теорема 3.6. [31, теорема 3] *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{SL}_n^\varepsilon(q)$, соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом $(n_1)(n_2)\dots(n_m)$. Пусть $\widetilde{T}$ и $\widetilde{N}$ — образы T и $N(G,T)$ в группе $\widetilde{G} = \mathrm{PSL}_n^\varepsilon(q)$. Тогда $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$ в том и только в том случае, если выполняется одно из следующих условий:*

(1) *q четно;*

(2) *a_i нечетно для некоторого $1 \leqslant i \leqslant m$;*

(3) *$(n)_2 < (\varepsilon q - 1)_2$;*

(4) *$m = 4$, n_1, n_2, n_3, n_4 нечетны;*

(5) *$m = 3$, $n_1 = n_2$ нечетно, n_3 четно, $(n_3)_2 > 2$, $(n)_2 \leqslant (\varepsilon q - 1)_2$;*

(6) *$m = 3$, $n_1 = n_2$ нечетно, n_3 четно, $(n_3)_2 = 2$, $(\varepsilon q - 1)_2 \neq (n)_2$;*

(7) *$m = 2$, n_1, n_2 нечетны;*

(8) *$m = 2$, n_1, n_2 четны, $n_1 \neq n_2$, $(n)_2 < d(\varepsilon q - 1)_2$, где $d = ((\frac{n_1}{2})_2, (\frac{n_2}{2})_2, (\varepsilon q - 1)_2)$;*

(9) *$m = 2, n_1, n_2$ четны, $n_1 \neq n_2$, $(n_1)_2 = (n_2)_2 \leqslant (\varepsilon q - 1)_2$, $(\varepsilon q - 1)_2 (n_1)_2 \leqslant (n)_2$;*

(10) *$m = 2$, $n_1 = n_2$ четно, $(n_1)_2 > 2$, $(n)_2 \leqslant (\varepsilon q - 1)_2$;*

(11) *$m = 2$, $n_1 = n_2$ четно, $(n_1)_2 = 2$, $(n)_2 \neq (\varepsilon q - 1)_2$;*

(12) *$m = 1$.*

Следствие 3.7. *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{SL}_n^\varepsilon(q)$, соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом $(n_1)(n_2)\dots(n_m)$, $m > 4$. Пусть $\widetilde{T}$ и $\widetilde{N}$ — образы групп T и $N(G,T)$ в $\widetilde{G} = \mathrm{PSL}_n^\varepsilon(q)$. Тогда $\widetilde{T}$ имеет дополнение в $\widetilde{N}$ в том и только в том случае, если выполняется одно из следующих условий:*

(1) *q четно;*

(2) *a_i нечетно для некоторого $1 \leqslant i \leqslant m$;*

(3) *$(n)_2 < (\varepsilon q - 1)_2$.*

Ортогональные группы

В случае ортогональных групп ответ на проблему 1 приведен в следующей теореме.

Теорема 3.8. [32, теорема 1, замечание 3] *Пусть $\overline{T}$ — максимальный σ-инвариантный тор группы $\overline{G} = \mathrm{SO}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ и $\widetilde{T}$ — образ тора $\overline{T}$ в $\widetilde{G} = \mathrm{PSO}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Тогда торы $\overline{T}$ и $\widetilde{T}$ имеют дополнения в $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ и $N_{\widetilde{G}}(\widetilde{T})$ соответственно.*

Пусть $n = n'+n''$, а $n' = n_1+\ldots+n_k$ и $n'' = n_{k+1}+\ldots+n_m$ — разбиения чисел n' и n'' соответственно. Всевозможные такие представления числа n в виде суммы $n = n_1+\ldots+n_k+n_{k+1}+\ldots+n_m$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами сопряженности группы Вейля типа B_n. Как и ранее, мы отождествляем разбиения, отличающиеся перестановкой слагаемых внутри каждого из разбиений n' и n''. Если класс сопряженности соответствует представлению $n = n_1 + \ldots + n_k + n_{k+1} + \ldots + n_m$, то выражение $(\overline{n_1})\ldots(\overline{n_k})(n_{k+1})\ldots(n_m)$ называется циклическим типом этого класса. Для циклического типа $(\overline{n_1})\ldots(\overline{n_k})(n_{k+1})\ldots(n_m)$ через b_i обозначим число элементов, равных n_i в разбиении n', если $1 \leqslant i \leqslant k$, и в разбиении n'', если $k+1 \leqslant i \leqslant m$. Определим $a_i = n_i b_i$ для $1 \leqslant i \leqslant m$.

Ответ на проблему 2 для групп лиева типа B_n содержится в следующем утверждении.

Теорема 3.9. [32, теорема 2] *Пусть T — максимальный тор группы $G = \Omega_{2n+1}(q)$, соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом $(\overline{n_1})\ldots(\overline{n_k})(n_{k+1})\ldots(n_m)$. Тогда тор T имеет дополнение в $N(G,T)$, если и только если выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $q \not\equiv 3 \pmod 4$;

(2) *a_i нечетно для некоторого $1 \leqslant i \leqslant m$;*

(3) *$k = m$, n_i четно для всех $1 \leqslant i \leqslant k$.*

Для групп лиева типа D_n существует биекция между классами сопряженности группы Вейля W и циклическими типами $(\overline{n_1})\ldots(\overline{n_k})(n_{k+1})\ldots(n_m)$, где k четно (за исключением одного случая, когда имеются два класса сопряженности для одного циклического типа). Ответ на проблему 2 для групп лиева типа D_n приведен в следующей теореме.

Теорема 3.10. [32, теорема 3] *Пусть T — максимальный тор группы $G = \mathrm{P}\Omega^+_{2n}(q)$, соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом $(\overline{n_1})\ldots(\overline{n_k})(n_{k+1})\ldots(n_m)$, где k четно, $n \geqslant 4$. Тогда тор T имеет дополнение в $N(G,T)$, если и только если выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $q \not\equiv 3 \pmod 4$;

(2) *a_i нечетно для некоторого $1 \leqslant i \leqslant m$;*

(3) $k = m$ *и* n_i *четно для всех* $1 \leqslant i \leqslant k$;

(4) $m = 4$, n_1, n_2, n_3, n_4 *нечетны;*

(5) $m = 2$, $k = 0$ *и* $n_1 = n_2$ *нечетно;*

(6) $m = 2$, $k = 2$ *и* $n_1 = n_2$ *нечетно.*

В случае скрученных групп лиева типа ${}^2D_n$ существует биекция между классами сопряженности группы Вейля W и циклическими типами $(\overline{n_1})\dots(\overline{n_k})(n_{k+1})\dots(n_m)$, где k нечетно. Проблема 2 для групп лиева типа ${}^2D_n$ решена в следующей теореме.

Теорема 3.11. [31, теорема 4] *Пусть* T *— максимальный тор группы* $G = \mathrm{P}\Omega^-_{2n}(q)$, *соответствующий элементу группы Вейля с циклическим типом* $(\overline{n_1})\dots(\overline{n_k})(n_{k+1})\dots(n_m)$, *где* k *нечетно,* $n \geqslant 4$. *Тогда* T *имеет дополнение в* $N(G,T)$, *если и только если выполняется одно из следующих условий:*

(1) $q \not\equiv 3 \pmod 4$;

(2) a_i *нечетно для некоторого* $1 \leqslant i \leqslant m$;

(3) $k = m$, n_i *четно для всех* $1 \leqslant i \leqslant k$.

§ 4. Нормализаторы максимальных торов в исключительных группах

Данный параграф посвящен ответам на проблемы 1 и 2 для исключительных групп лиева типа.

Ответ на проблему 1 содержится в теореме 4.1 и следствии 4.2. Данные утверждения вместе с результатами параграфа 3 дают полный ответ на проблему 1. Итоговые результаты по проблеме 1 приведены в таблице 1.

Ответ на проблему 2 для групп $E_6^\varepsilon(q)$ (односвязных и присоединенного типа) приводится в теореме 4.3(1), для групп $E_7(q)$ (односвязных и присоединенного типа) — в теореме 4.4, для групп $E_8(q)$ — в теореме 4.6, для групп $F_4(q)$ — в теореме 4.7, для групп $G_2(q), {}^2G_2(q), {}^3D_4(q)$ — в теореме 4.9.

Отметим, что в теореме 4.7 кроме ответа на проблему 2 для групп $F_4(q)$, также найдены минимальные добавления к максимальным торам в их алгебраических нормализаторах.

Помимо вышеупомянутых результатов в данном параграфе для всех конечных исключительных групп лиева типа (односвязных и присоединенного типа) найдены минимальные порядки поднятий элементов группы Вейля в соответствующем алгебраическом нормализаторе максимального тора.

Исключительные алгебраические группы

Теорема 4.1. [33, теорема] *Пусть $\overline{G}$ — простая алгебраическая группа присоединенного типа с корневой системой Φ над полем $\overline{\mathbb{F}}_p$, где $\Phi \in \{G_2, F_4, E_6, E_7, E_8\}$. Пусть $\overline{T}$ — максимальный тор в $\overline{G}$ и $\overline{N} = N_{\overline{G}}(\overline{T})$. Тогда $\overline{N}$ расщепляется над $\overline{T}$ в том и только в том случае, если $p = 2$ или $\Phi = G_2$.*

Следствие 4.2. [33, следствие] *Пусть $\widetilde{G}$ — простая универсальная алгебраическая группа с корневой системой Φ над полем $\overline{\mathbb{F}}_p$, где $\Phi \in \{G_2, F_4, E_6, E_7, E_8\}$. Пусть $\widetilde{T}$ — максимальный тор в $\widetilde{G}$ и $\widetilde{N} = N_{\widetilde{G}}(\widetilde{T})$. Тогда $\widetilde{N}$ расщепляется над $\widetilde{T}$ в том и только в том случае, если $p = 2$ или $\Phi = G_2$.*

Исключительные группы $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$

В группе $E_6(q)$ содержится 25 классов сопряженности максимальных торов и мы будем нумеровать их также как в работе [5]. Пусть $\Delta = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$ — фундаментальная система корней корневой системы E_6. Определим

$$r_{14} = r_2+r_4+r_5, r_{31} = r_2+r_3+2r_4+2r_5+r_6, r_{36} = r_1+2r_2+2r_3+3r_4+2r_5+r_6.$$

Через w_i обозначается элемент группы Вейля W, соответствующий отражению в гиперплоскости, ортогональной корню r_i. Для краткости, будем обозначать через $E_6^-(q)$ конечную группу ${}^2E_6(q)$ и через $E_6^+(q)$ конечную группу $E_6(q)$ (в обоих случаях группы могут быть односвязные или присоединенного типа). Ответ на проблему 2 для групп $E_6^\varepsilon(q)$ содержится в следующей теореме.

Теорема 4.3. [34, теоремы 1.1, 1.2] *Пусть $G = E_6^\varepsilon(q)$ (односвязная или присоединенного типа), где $\varepsilon \in \{+, -\}$, и W — группа Вейля группы G. Пусть T — максимальный тор группы G, соответствующий элементу w из W. Тогда верны следующие утверждения:*

(1) *T не имеет дополнения в $N(G, T)$ тогда и только тогда, когда либо $q \equiv -\varepsilon 1 \pmod 4$ и w сопряжен в W с элементом $w_3w_2w_4w_{14}$, либо q нечетно и w сопряжен с одним из следующих элементов: 1, w_1, w_1w_2, $w_2w_3w_5$, $w_1w_3w_4$, $w_1w_4w_6w_{36}$, $w_1w_4w_6w_3$, $w_1w_4w_6w_3w_{36}$;*

(2) *существует поднятие для w в $N(G, T)$ порядка $|w|$.*

Результаты теоремы проиллюстрированы в таблице 2, которая также содержит дополнительную информацию о максимальных торах.

Исключительные группы $E_7(q)$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 62-98
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 62-98

Мы нумеруем классы сопряженности группы W и корни соответствующей корневой системы как в [5]. Пусть $\Delta = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_7\}$ — фундаментальная система корней корневой системы E_7, тогда определим

$$r_{16} = r_2 + r_4 + r_5, \quad r_{53} = r_1 + 2r_2 + 2r_3 + 3r_4 + 2r_5 + r_6.$$

Через w_i будем обозначать элемент группы W, соответствующий отражению в гиперплоскости, ортогональной i-му положительному корню r_i. Через U обозначим подгруппу группы W, порожденную элементами $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$. Отметим, что U изоморфна группе Вейля типа E_6. Для корневой системы Φ будем обозначать через $\Phi^{sc}(q)$ и $\Phi^{ad}(q)$ односвязную и присоединенную группы с корневой системой Φ, соответственно.

Ответ на проблему 2 для групп $E_7(q)$ содержится в следующей теореме.

Теорема 4.4. [35, теорема 1.2] *Пусть $G = E_7(q)$ (односвязная или присоединенного типа), W — группа Вейля группы G и w_0 — центральная инволюция в W. Пусть T — максимальный тор группы G, соответствующий элементу w из W. Тогда верны следующие утверждения:*

(1) *Если $G = E_7^{ad}(q)$, то элемент w имеет поднятие порядка $|w|$ в $N(G, T)$. Более того, T не имеет дополнения в $N(G, T)$ тогда и только тогда, когда q нечетно и хотя бы один из элементов w или ww_0 сопряжен в W с одним из следующих элементов: 1, w_1, w_1w_2, $w_2w_3w_5$, $w_1w_3w_4$, $w_1w_4w_6w_{53}$, $w_1w_4w_6w_3$, $w_3w_2w_4w_{16}$, $w_1w_4w_6w_3w_{53}$, $w_3w_2w_4w_{16}w_7$;*

(2) *Если $G = E_7^{sc}(q)$, то T не имеет дополнения в $N(G, T)$ тогда и только тогда, когда q нечетно. Более того, w имеет поднятие в $N(G, T)$ порядка $|w|$ тогда и только тогда, когда либо q четно или элемент w удовлетворяет одному из следующих условий:*

   (а) *$|w|$ делится на 4;*

   (б) *$|w|$ нечетный;*

   (в) *w сопряжен в W с некоторым элементом из U.*

Замечание 4.5. *Из таблицы 4 следует, что элемент w или ww_0 сопряжен с одним из элементов, указанных в пункте (1), тогда и только тогда, когда порядок $|w|$ делит 4.*

Мы иллюстрируем результаты теоремы в таблице 4, а также в таблице 6 с некоторой дополнительной информацией о максимальных торах.

Исключительные группы $E_8(q)$

Мы нумеруем классы сопряженности группы W и корни соответствующей корневой системы как в [5]. Пусть $\Delta = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_7, r_8\}$ — фундаментальная система корней корневой системы E_8, тогда

$r_{18} = r_2 + r_4 + r_5$, $r_{26} = r_2 + r_4 + r_5 + r_6$,
$r_{46} = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7$,
$r_{69} = r_1 + 2r_2 + 2r_3 + 3r_4 + 2r_5 + r_6$,
$r_{74} = r_2 + r_3 + 2r_4 + 2r_5 + 2r_6 + 2r_7 + r_8$,
$r_{120} = 2r_1 + 3r_2 + 4r_3 + 6r_4 + 5r_5 + 4r_6 + 3r_7 + 2r_8$.

Через w_i будем обозначать элемент группы W, соответствующий отражению в гиперплоскости, ортогональной i-му положительному корню r_i. Через U обозначим подгруппу группы W, порожденную элементами $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$. Отметим, что U изоморфна группе Вейля типа E_6.

Ответ на проблему 2 для групп $E_8(q)$ содержится в следующей теореме.

Теорема 4.6. [35, теорема 1.3] *Пусть $G = E_8(q)$, W — группа Вейля группы G и w_0 — центральная инволюция в W. Пусть T — максимальный тор группы G, соответствующий элементу w из W. Тогда верны следующие утверждения:*

(1) *T не имеет дополнения в $N(G,T)$ тогда и только тогда, когда q нечетно и хотя бы один из элементов w или ww_0 сопряжен в W с одним из следующих элементов:*

$$1,\ w_1,\ w_1w_2,\ w_3w_1,\ w_2w_3w_5,\ w_1w_3w_5,\ w_1w_3w_4,\ w_1w_4w_6w_{69},\ w_1w_2w_3w_5,$$
$$w_1w_4w_6w_3,\ w_3w_2w_5w_4,\ w_3w_2w_4w_{18},\ w_1w_4w_6w_3w_{69},\ w_2w_5w_3w_4w_6,$$
$$w_{26}w_5w_4w_3w_2,\ w_1w_4w_6w_3w_7,\ w_3w_2w_4w_{18}w_7,\ w_{46}w_3w_5w_1w_4w_6,$$
$$w_2w_3w_5w_7,\ w_{74}w_3w_2w_5w_4,\ w_8w_1w_4w_6w_3,\ w_1w_2w_3w_6w_8w_7,$$
$$w_1w_4w_3w_7w_6w_8,\ w_4w_8w_2w_5w_7w_{120},\ w_2w_3w_4w_8w_7w_{18},\ w_2w_3w_4w_5w_6w_8,$$
$$w_2w_4w_5w_6w_7w_8w_{120},\ w_2w_3w_4w_7w_{120}w_8w_{18},\ w_2w_3w_4w_7w_{120}w_{18}w_8w_{74};$$

(2) *элемент w имеет поднятие в $N(G,T)$ порядка $|w|$.*

Результаты теоремы проиллюстрированы в таблице 5, а также в общей таблице 6.

Исключительные группы малого ранга

Пусть $\Delta = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ — фундаментальная система корней корневой системы F_4. Мы полагаем, что

$$r_8 = r_1 + r_2 + r_3, \quad r_{16} = r_2 + 2r_3 + 2r_4, \quad r_{21} = r_1 + 2r_2 + 3r_3 + 2r_4.$$

Через w_i будем обозначать элемент группы W, соответствующий отражению в гиперплоскости, ортогональной i-му положительному корню r_i.

Ответ на проблему 2 для групп $F_4(q)$ содержится в следующей теореме, где найдены минимальные добавления к максимальным торам в их алгебраических нормализаторах.

Теорема 4.7. [36, теорема 1.1] *Пусть $G = F_4(q)$, W — группа Вейля группы G и w_0 — центральная инволюция в W. Предположим, что максимальный тор T группы G соответствует элементу w из W и M — добавление к T в $N(G,T)$ минимального порядка. Тогда $|M \cap T| \leqslant 8$ и справедливы следующие утверждения.*

(1) *$|M \cap T| = 1$ тогда и только тогда, когда либо q четно, либо порядок элемента w не делит 4. Другими словами, T имеет дополнение в $N(G,T)$ только в этих случаях.*

(2) *$|M \cap T| = 2$ тогда и только тогда, когда q нечетно и хотя бы один из элементов w или ww_0 сопряжен в W с одним из следующих элементов: w_3, $w_{16}w_3$, w_3w_2, $w_2w_1w_{16}$ или $w_{16}w_3w_2$.*

(3) *$|M \cap T| = 4$ тогда и только тогда, когда q нечетно и w сопряжен в W с одним из следующих элементов: 1, w_0, w_6w_3, $w_8w_{16}w_3w_2$, w_2 при $q \equiv 1 \pmod 4$ или w_0w_2 при $q \equiv 3 \pmod 4$.*

(4) *$|M \cap T| = 8$ тогда и только тогда, когда либо $q \equiv 3 \pmod 4$ и w сопряжен с w_2, либо $q \equiv 1 \pmod 4$ и w сопряжен с w_2w_0.*

Для алгебраических групп лиева типа F_4 в работе [18] указаны минимальные порядки поднятий для элементов, принадлежащих так называемым регулярным или эллиптическим классам сопряженности группы W (см. также [19,20]). В следующей теореме найдены минимальные порядки поднятий для всех элементов группы Вейля в соответствующих алгебраических нормализаторах.

Теорема 4.8. [36, теорема 1.2] *Пусть $G = F_4(q)$ и W — группа Вейля группы G. Пусть T — максимальный тор группы G, соответствующий элементу w из W. Тогда w имеет поднятие в $N(G,T)$ порядка $|w|$, за исключением следующих случаев:*

(1) *q нечетно и w сопряжен с $w_{16}w_3w_2$ или $w_{21}w_8w_3w_2$.*

(2) *$q \equiv 3 \pmod 4$ и w сопряжен с w_3w_2 или $w_2w_1w_{16}$.*

Результаты теорем 4.7 и 4.8 проиллюстрированы в таблицах 7 и 8, соответственно. Отметим, что обе теоремы верны для групп $F_4(2)$ и $2.F_4(2)$. В случае $q > 2$ существует только одна конечная группа лиева типа F_4 над полем порядка q. Отметим также, что если элемент группы $N(G,T)$ является поднятием для w, то очевидно он также является поднятием и в группе $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ для соответствующей группы $\overline{G}$. Кроме того, из доказательства данной теоремы следует, что для группы $\overline{G}$ пункт (1) также остается исключением, а пункт (2) — нет.

Ответ на проблему 2 для оставшихся исключительных групп содержится в следующей теореме.

Теорема 4.9. [31] *Пусть $G \in \{G_2(q), {}^2G_2(q), {}^3D_4(q), {}^2F_4(q), {}^2B_2(q)\}$. Если T — максимальный тор группы G и N — его алгебраический нормализатор, то N расщепляется над T.*

Из полученных результатов для исключительных групп лиева типа можно сделать следующие выводы.

Следствие 4.10. *Пусть G — конечная простая группа лиева типа и W — ее группа Вейля. Пусть T — максимальный тор группы G, соответствующий элементу w из W и $N = N(G,T)$ — алгебраический нормализатор тора T.*

(1) *Если $G = F_4(q)$, то T не имеет дополнения в $N \Leftrightarrow |w|$ делит 4 и q нечетно.*

(2) *Если $G = E_7(q)$, то T не имеет дополнения в $N \Leftrightarrow |w|$ делит 4 и q нечетно.*

(3) *Если $G = E_6^\varepsilon(q)$, то T не имеет дополнения в $N \Leftrightarrow |w|$ делит 4 и q нечетно, за исключением $w = w_3w_2w_4w_{14}$ (см. таблицу 2).*

(4) *Если $G = E_8(q)$, то T не имеет дополнения в N, если $|w|$ делит 4 и q нечетно.*

§ 5. Таблицы

В таблицах 2, 4 и 5 приводятся результаты о существовании дополнений для максимальных торов вместе с дополнительной информацией в группах $E_6(q)$, $E_7(q)$ и $E_8(q)$ соответственно. Мы выбираем представителей классов сопряженности группы W в соответствии с [5]. Третий столбец в этих таблицах содержит порядок элемента w. В таблице 2 четвертый столбец содержит структурное описание группы $C_W(w)$. Следующий столбец содержит циклическое строение тора T, где через n^k мы обозначаем элементарную абелеву группу $\mathbb{Z}_n^k$. Наконец, в последнем столбце символ «+» используется, если соответствующий тор имеет дополнение в своем алгебраическом нормализаторе, иначе используется символ «–». Символ «±» для случая 14 в таблице 2 означает, что алгебраический нормализатор расщепляется над тором тогда и только тогда, когда $q \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$.

В случае конечных групп $E_6^{ad}(q)$, $E_6^{sc}(q)$, $E_7^{ad}(q)$ и $E_8(q)$ для любого элемента $w \in W$ существует поднятие для в $N(G,T)$ порядка $|w|$, что неверно для групп $E_7^{sc}(q)$. В таблице 3 для односвязных групп $E_7^{sc}(q)$ приводятся поднятия для элементов группы Вейля в $N(G,T)$. Для каждого элемента w из второго столбца существует поднятие для w в $N(G,T)$ такого же порядка. В четвертом столбце табл. 3 перечислены примеры таких поднятий $n_w \in \mathcal{T}$, то есть $\pi(n_w) = w$ и $|n_w| = |w|$. В последнем столбце указаны поднятия для ww_0 в $N(G,T)$ такого же порядка. Символ «–» означает, что поднятия такого же порядка не существует. Напомним, что если для w не существует поднятия порядка $|w|$, то минимальный порядок поднятия равен $2|w|$.

Объединенные результаты теорем 4.3, 4.4 и 4.6 приведены в общей таблице 6. В данной таблице мы используем обозначения элементов соответствующей группы Вейля из работы [5]. Символ «$+$» используется, если соответствующий тор имеет дополнение в своем алгебраическом нормализаторе, иначе используется символ «$-$» в соответствующей ячейке таблицы. Символ «$\pm$» для случая 14 означает, что алгебраический нормализатор расщепляется над тором тогда и только тогда, когда $q \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$.

В таблице 7 собраны результаты теоремы 4.7 вместе с дополнительной информацией. Мы выбираем представителей классов группы W в соответствии с [10]. Если T — максимальный тор, соответствующий представителю w, то мы пишем w во второй столбец таблицы 6. Если элементы w и ww_0 не сопряжены, то мы также указываем в скобках номер максимального тора, соответствующего классу $(ww_0)^W$. Третий столбец содержит порядок элемента w, четвертый столбец содержит структурное описание группы $C_W(w)$. Пятый столбец содержит циклическое строение тора T. Здесь через n^k мы обозначаем элементарную абелеву группу $\mathbb{Z}_n^k$. Наконец, шестой столбец содержит минимально возможный порядок пересечения $M \cap T$, где M – добавление к T. Здесь запись 4/8 для второго (девятого) тора означает, что если $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ ($q \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 4)$), то минимальный порядок пересечения $M \cap T$ равен 4, иначе он равен 8.

В таблице 8 для элементов группы Вейля $W(F_4)$ приводятся примеры поднятий порядка $|w|$ в группе $N(G,T)$, если они существуют. Представители w и их порядки – такие же, как и в таблице 7. Третий столбец содержит примеры поднятий. В четвертом столбце мы пишем условия, которые являются необходимыми и достаточными для существования поднятий.

Для полноты изложения мы приводим таблицы 9, 10 и 11 для групп $G_2(q), {}^2G_2(q)$ и ${}^3D_4(q)$, в которых собрана информация о строении максимальных торов и их дополнений.

Таблица 4: Расщепляемость нормализаторов максимальных торов группы $E_7^{ad}(q)$

№	представитель w	$\|w\|$	циклическое строение $(2, q-1).T$	Доп.
1	1	1	$(q-1)^7$	$-$
2	w_1	2	$(q-1)^5 \times (q^2-1)$	$-$
3	w_1w_2	2	$(q-1)^3 \times (q^2-1)^2$	$-$
4	w_3w_1	3	$(q-1)^4 \times (q^3-1)$	$+$
5	$w_2w_3w_5$	2	$(q-1) \times (q^2-1)^3$	$-$
6	$w_1w_3w_5$	6	$(q-1)^2 \times (q^2-1) \times (q^3-1)$	$+$
7	$w_1w_3w_4$	4	$(q-1)^3 \times (q^4-1)$	$-$

Продолжение таблицы 4

№	представитель w	$\|w\|$	циклическое строение $(2, q-1).T$	
8	$w_1w_4w_6w_{53}$	2	$(q-1)\times(q+1)^2\times(q^2-1)^2$	−
9	$w_1w_2w_3w_5$	6	$(q-1)\times(q^2-1)\times(q+1)(q^3-1)$	+
10	$w_1w_5w_3w_6$	3	$(q-1)\times(q^3-1)^2$	+
11	$w_1w_4w_6w_3$	4	$(q-1)\times(q^2-1)\times(q^4-1)$	−
12	$w_1w_4w_3w_2$	5	$(q-1)^2\times(q^5-1)$	+
13	$w_3w_2w_5w_4$	6	$(q-1)\times(q^2-1)\times(q-1)(q^3+1)$	+
14	$w_3w_2w_4w_{16}$	4	$(q-1)\times((q-1)(q^2+1))^2$	−
15	$w_1w_5w_3w_6w_2$	6	$(q^3-1)\times(q+1)(q^3-1)$	+
16	$w_1w_4w_6w_3w_{53}$	4	$(q-1)\times(q+1)^2\times(q^4-1)$	−
17	$w_1w_4w_5w_3w_{53}$	10	$(q-1)\times(q+1)(q^5-1)$	+
18	$w_1w_4w_6w_3w_5$	6	$(q-1)\times(q^6-1)$	+
19	$w_2w_5w_3w_4w_6$	8	$(q-1)\times(q^2-1)(q^4+1)$	+
20	$w_{23}w_5w_4w_3w_2$	12	$(q-1)\times(q-1)(q^2+1)(q^3+1)$	+
21	$w_1w_5w_2w_3w_6w_{53}$	3	$(q^2+q+1)^2\times(q^3-1)$	+
22	$w_1w_4w_6w_3w_5w_{53}$	6	$(q^3+1)\times(q^3-1)\times(q+1)$	+
23	$w_1w_4w_6w_3w_2w_5$	12	$(q^3-1)(q^4-q^2+1)$	+
24	$w_1w_4w_{16}w_3w_2w_6$	9	$(q-1)(q^6+q^3+1)$	+
25	$w_1w_4w_{16}w_3w_2w_{40}$	6	$(q^2-q+1)\times(q-1)(q^4+q^2+1)$	+
26	$w_1w_4w_6w_3w_7$	12	$(q^3-1)\times(q^4-1)$	+
27	$w_1w_4w_6w_2w_3w_7$	15	$(q^5-1)(q^2+q+1)$	+
28	$w_3w_2w_4w_{16}w_7$	4	$(q-1)(q^2+1)\times(q^2-1)\times(q^2+1)$	−
29	$w_1w_4w_6w_3w_5w_7$	7	q^7-1	+
30	$w_{39}w_3w_5w_1w_4w_6$	8	$(q^4+1)\times(q-1)(q^2+1)$	+

Таблица 5: Расщепляемость нормализаторов максимальных торов группы $E_8(q)$

№	представитель w	$\|w\|$	циклическое строение T	Доп.
1	1	1	$(q-1)^8$	−
2	w_1	2	$(q-1)^6\times(q^2-1)$	−
3	w_1w_2	2	$(q-1)^4\times(q^2-1)^2$	−
4	w_3w_1	3	$(q-1)^5\times(q^3-1)$	−
5	$w_2w_3w_5$	2	$(q-1)^2\times(q^2-1)^3$	−
6	$w_1w_3w_5$	6	$(q-1)^3\times(q^2-1)\times(q^3-1)$	−
7	$w_1w_3w_4$	4	$(q-1)^4\times(q^4-1)$	−
8	$w_1w_4w_6w_{69}$	2	$(q-1)^2\times(q+1)^2\times(q^2-1)^2$	−
9	$w_1w_2w_3w_5$	6	$(q-1)^2\times(q^2-1)$ $\times(q+1)(q^3-1)$	−
10	$w_1w_5w_3w_6$	3	$(q-1)^2\times(q^3-1)^2$	+

Продолжение таблицы 5

№	представитель w	$\|w\|$	циклическое строение T	Доп.
11	$w_1w_4w_6w_3$	4	$(q-1)^2 \times (q^2-1) \times (q^4-1)$	$-$
12	$w_1w_4w_3w_2$	5	$(q-1)^3 \times (q^5-1)$	$+$
13	$w_3w_2w_5w_4$	6	$(q-1)^2 \times (q^2-1)$ $\times(q-1)(q^3+1)$	$-$
14	$w_3w_2w_4w_{18}$	4	$(q-1)^2 \times ((q-1)(q^2+1))^2$	$-$
15	$w_1w_5w_3w_6w_2$	6	$(q-1) \times (q^3-1)$ $\times(q+1)(q^3-1)$	$+$
16	$w_1w_4w_6w_3w_{69}$	4	$(q-1)^2 \times (q+1)^2 \times (q^4-1)$	$-$
17	$w_1w_4w_5w_3w_{69}$	10	$(q-1)^2 \times (q+1)(q^5-1)$	$+$
18	$w_1w_4w_6w_3w_5$	6	$(q-1)^2 \times (q^6-1)$	$+$
19	$w_2w_5w_3w_4w_6$	8	$(q-1)^2 \times (q^2-1)(q^4+1)$	$-$
20	$w_{26}w_5w_4w_3w_2$	12	$(q-1)^2 \times (q-1)(q^2+1)(q^3+1)$	$-$
21	$w_1w_5w_2w_3w_6w_{69}$	3	$(q-1) \times (q^2+q+1)^2 \times (q^3-1)$	$+$
22	$w_1w_4w_6w_3w_5w_{69}$	6	$(q-1) \times (q^3+1) \times (q^3-1)$ $\times(q+1)$	$+$
23	$w_1w_4w_6w_3w_2w_5$	12	$(q-1) \times (q^3-1)(q^4-q^2+1)$	$+$
24	$w_1w_4w_{18}w_3w_2w_6$	9	$(q-1) \times (q-1)(q^6+q^3+1)$	$+$
25	$w_1w_4w_{18}w_3w_2w_{48}$	6	$(q-1) \times (q^2-q+1)$ $\times(q-1)(q^4+q^2+1)$	$+$ $+$
26	$w_1w_4w_6w_3w_7$	12	$(q-1) \times (q^3-1) \times (q^4-1)$	$-$
27	$w_1w_4w_6w_2w_3w_7$	15	$(q-1) \times (q^5-1)(q^2+q+1)$	$+$
28	$w_3w_2w_4w_{18}w_7$	4	$(q^2-1) \times ((q^2+1)(q-1))^2$	$-$
29	$w_1w_4w_6w_3w_5w_7$	7	$(q-1) \times (q^7-1)$	$+$
30	$w_{46}w_3w_5w_1w_4w_6$	8	$(q-1)(q^4+1) \times (q-1)(q^2+1)$	$-$
31	$w_2w_3w_5w_7$	2	$(q^2-1)^4$	$-$
32	$w_{74}w_3w_2w_5w_4$	6	$(q^2-1)^2 \times (q+1)(q^3-1)$	$-$
33	$w_8w_1w_4w_6w_3$	4	$(q^2-1)^2 \times (q^4-1)$	$-$
34	$w_1w_5w_3w_6w_2w_8$	6	$(q+1)(q^3-1) \times (q+1)(q^3-1)$	$+$
35	$w_1w_2w_3w_6w_8w_7$	12	$(q+1)(q^3-1) \times (q^4-1)$	$-$
36	$w_1w_4w_3w_7w_6w_8$	4	$(q^4-1) \times (q^4-1)$	$-$
37	$w_4w_8w_2w_5w_7w_{120}$	4	$(q^2-1)^2 \times (q^2+1)^2$	$-$
38	$w_1w_8w_2w_4w_5w_6$	10	$(q^2-1) \times (q+1)(q^5-1)$	$+$
39	$w_1w_2w_4w_6w_5w_7$	6	$(q^2-1) \times (q^6-1)$	$+$
40	$w_2w_3w_5w_7w_4w_8$	6	$(q^2-1) \times (q^6-1)$	$+$
41	$w_2w_3w_4w_8w_7w_{18}$	12	$(q-1)(q^2+1) \times (q^2+1)(q^3-1)$	$-$
42	$w_2w_3w_4w_5w_6w_8$	8	$(q^2-1) \times (q^2-1)(q^4+1)$	$-$
43	$w_1w_5w_8w_2w_3w_6w_{69}$	6	$(q^2+q+1)^2 \times (q+1)(q^3-1)$	$+$
44	$w_1w_5w_7w_2w_3w_6w_8$	30	$(q+1)(q^2+q+1)(q^5-1)$	$+$
45	$w_1w_4w_2w_3w_6w_8w_7$	20	$(q+1)(q^2+1)(q^5-1)$	$+$
46	$w_1w_4w_6w_3w_5w_7w_{120}$	14	$(q+1)(q^7-1)$	$+$

Продолжение таблицы 5

№	представитель w	$\|w\|$	циклическое строение T	Доп.
47	$w_1w_3w_4w_5w_6w_7w_8$	8	(q^8-1)	$+$
48	$w_2w_4w_5w_6w_7w_8w_{120}$	8	$(q^2-1)\times(q^2+1)\times(q^4+1)$	$-$
49	$w_2w_3w_4w_7w_{120}w_8w_{18}$	4	$(q^2+1)^2\times(q^4-1)$	$-$
50	$w_2w_3w_5w_4w_8w_6w_{120}$	24	$(q+1)(q^3-1)(q^4+1)$	$+$
51	$w_{26}w_5w_4w_3w_2w_{120}w_8$	12	$(q^2+1)(q^6-1)$	$+$
52	$w_1w_4w_6w_3w_2w_5w_8$	12	$(q^2-1)(q^2+q+1)(q^4-q^2+1)$	$+$
53	$w_1w_4w_{18}w_3w_2w_6w_8$	18	$(q^2-1)(q^6+q^3+1)$	$+$
54	$w_1w_4w_{18}w_3w_2w_{48}w_8$	6	$(q^2-q+1)^2\times(q+1)(q^3-1)$	$+$
55	$w_2w_3w_4w_5w_6w_7w_8$	12	$(q^2-1)(q^6+1)$	$+$
56	$w_1w_2w_3w_5w_6w_8w_{120}w_{69}$	3	$(q^2+q+1)^4$	$+$
57	$w_1w_4w_2w_3w_6w_8w_7w_{120}$	5	$(q^4+q^3+q^2+q+1)^2$	$+$
58	$w_1w_3w_4w_5w_6w_7w_8w_{120}$	9	$(q^2+q+1)\times(q^6+q^3+1)$	$+$
59	$w_2w_3w_4w_7w_{120}w_{18}w_8w_{74}$	4	$(q^2+1)^4$	$-$
60	$w_2w_3w_5w_7w_4w_6w_8w_{114}$	12	$(q^2+1)\times(q^6+1)$	$+$
61	$w_4w_6w_8w_{113}w_3w_5w_{32}w_7$	8	$(q^4+1)^2$	$+$
62	$w_1w_2w_3w_4w_5w_6w_8w_{120}$	12	$(q^4-q^2+1)(q^2+q+1)$ $\times(q^2+q+1)$	$+$
63	$w_1w_4w_6w_8w_3w_{32}w_5w_{120}$	6	$(q^4+q^2+1)\times(q^2+q+1)$ $\times(q^2-q+1)$	$+$
64	$w_1w_2w_3w_4w_5w_6w_7w_8$	30	$q^8+q^7-q^5-q^4-q^3+q+1$	$+$
65	$w_1w_4w_6w_8w_{32}w_5w_7w_{120}$	24	q^8-q^4+1	$+$
66	$w_1w_4w_6w_8w_{32}w_2w_5w_7$	20	$q^8-q^6+q^4-q^2+1$	$+$
67	$w_2w_{32}w_5w_7w_1w_4w_6w_{65}$	12	$(q^4-q^2+1)^2$	$+$

Таблица 6: Расщепляемость нормализаторов в $E_l(q)$

тор	предств.	E_6^ε	E_7	E_8	тор	предств.	E_8
1	1	$-$	$-$	$-$	35	$\alpha\beta\gamma\zeta\vartheta\eta$	$-$
2	α	$-$	$-$	$-$	36	$\alpha\delta\gamma\eta\zeta\vartheta$	$-$
3	$\alpha\beta$	$-$	$-$	$-$	37	$\delta\vartheta\beta\varepsilon\eta\lambda$	$-$
4	$\gamma\alpha$	$+$	$+$	$-$	38	$\alpha\vartheta\beta\delta\varepsilon\zeta$	$+$
5	$\beta\gamma\varepsilon$	$-$	$-$	$-$	39	$\alpha\beta\delta\zeta\varepsilon\eta$	$+$
6	$\alpha\gamma\varepsilon$	$+$	$+$	$-$	40	$\beta\gamma\varepsilon\eta\delta\vartheta$	$+$
7	$\alpha\gamma\delta$	$-$	$-$	$-$	41	$\beta\gamma\delta\vartheta\eta\rho$	$-$
8	$\alpha\delta\zeta\mu$	$-$	$-$	$-$	42	$\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\vartheta$	$-$
9	$\alpha\beta\gamma\varepsilon$	$+$	$+$	$-$	43	$\alpha\varepsilon\vartheta\beta\gamma\zeta\mu$	$+$
10	$\alpha\varepsilon\gamma\zeta$	$+$	$+$	$+$	44	$\alpha\varepsilon\eta\beta\gamma\zeta\vartheta$	$+$
11	$\alpha\delta\zeta\gamma$	$-$	$-$	$-$	45	$\alpha\delta\beta\gamma\zeta\vartheta\eta$	$+$
12	$\alpha\delta\gamma\beta$	$+$	$+$	$+$	46	$\alpha\delta\zeta\gamma\varepsilon\eta\lambda$	$+$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 62-98
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 62-98

Продолжение таблицы 6

тор	предств.	E_6^ε	E_7	E_8	тор	предств.	E_8
13	$\gamma\beta\varepsilon\delta$	$+$	$+$	$-$	47	$\alpha\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta$	$+$
14	$\gamma\beta\delta\rho$	$\pm$	$-$	$-$	48	$\beta\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta\lambda$	$-$
15	$\alpha\varepsilon\gamma\zeta\beta$	$+$	$+$	$+$	49	$\beta\gamma\delta\eta\lambda\vartheta\rho$	$-$
16	$\alpha\delta\zeta\gamma\mu$	$-$	$-$	$-$	50	$\beta\gamma\varepsilon\delta\vartheta\zeta\lambda$	$+$
17	$\alpha\delta\varepsilon\gamma\mu$	$+$	$+$	$+$	51	$\pi\varepsilon\delta\gamma\beta\lambda\vartheta$	$+$
18	$\alpha\delta\zeta\gamma\varepsilon$	$+$	$+$	$+$	52	$\alpha\delta\zeta\gamma\beta\varepsilon\vartheta$	$+$
19	$\beta\varepsilon\gamma\delta\zeta$	$+$	$+$	$-$	53	$\alpha\delta\rho\gamma\beta\zeta\vartheta$	$+$
20	$\pi\varepsilon\delta\gamma\beta$	$+$	$+$	$-$	54	$\alpha\delta\rho\gamma\beta\nu\vartheta$	$+$
21	$\alpha\varepsilon\beta\gamma\zeta\mu$	$+$	$+$	$+$	55	$\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta$	$+$
22	$\alpha\delta\zeta\gamma\varepsilon\mu$	$+$	$+$	$+$	56	$\alpha\beta\gamma\varepsilon\zeta\vartheta\lambda\mu$	$+$
23	$\alpha\delta\zeta\gamma\beta\varepsilon$	$+$	$+$	$+$	57	$\alpha\delta\beta\gamma\zeta\vartheta\eta\lambda$	$+$
24	$\alpha\delta\rho\gamma\beta\zeta$	$+$	$+$	$+$	58	$\alpha\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta\lambda$	$+$
25	$\alpha\delta\rho\gamma\beta\nu$	$+$	$+$	$+$	59	$\beta\gamma\delta\eta\lambda\rho\vartheta\kappa$	$-$
26	$\alpha\delta\zeta\gamma\eta$		$+$	$-$	60	$\beta\gamma\varepsilon\eta\delta\zeta\vartheta\psi$	$+$
27	$\alpha\delta\zeta\beta\gamma\eta$		$+$	$+$	61	$\delta\zeta\vartheta\omega\gamma\varepsilon\xi\eta$	$+$
28	$\gamma\beta\delta\rho\eta$		$-$	$-$	62	$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\vartheta\lambda$	$+$
29	$\alpha\delta\zeta\gamma\varepsilon\eta$		$+$	$+$	63	$\alpha\delta\zeta\vartheta\gamma\xi\varepsilon\lambda$	$+$
30	$\tau\gamma\varepsilon\alpha\delta\zeta$		$+$	$-$	64	$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta$	$+$
31	$\beta\gamma\varepsilon\eta$			$-$	65	$\alpha\delta\zeta\vartheta\xi\varepsilon\eta\lambda$	$+$
32	$\kappa\gamma\beta\varepsilon\delta$			$-$	66	$\alpha\delta\zeta\vartheta\xi\beta\varepsilon\eta$	$+$
33	$\vartheta\alpha\delta\zeta\gamma$			$-$	67	$\beta\xi\varepsilon\eta\alpha\delta\zeta\upsilon$	$+$
34	$\alpha\varepsilon\gamma\zeta\beta\vartheta$			$+$			

№	Представитель w	$\|w\|$	Строение $C_W(w)$	Циклическое строение T	Доп.
1	1	1	$\mathrm{O}_5(3):\mathbb{Z}_2$	$(q-1)^6$	$-$
2	w_1	2	$\mathrm{S}_2\times\mathrm{S}_6$	$(q-1)^4\times(q^2-1)$	$-$
3	w_1w_2	2	$D_8\times\mathrm{S}_4$	$(q-1)^2\times(q^2-1)^2$	$-$
4	w_3w_1	3	$\mathbb{Z}_3\times((\mathrm{S}_3\times\mathrm{S}_3):\mathbb{Z}_2)$	$(q-1)^3\times(q^3-1)$	$+$
5	$w_2w_3w_5$	2	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathrm{S}_4$	$(q^2-1)^3$	$-$
6	$w_1w_3w_5$	6	$\mathbb{Z}_6\times\mathrm{S}_3$	$(q-1)\times(q^2-1)\times(q^3-1)$	$+$
7	$w_1w_3w_4$	4	$\mathbb{Z}_4\times D_8$	$(q-1)^2\times(q^4-1)$	$-$
8	$w_1w_4w_6w_{36}$	2	$\mathbb{Z}_2:(((A_4\times A_4):\mathbb{Z}_2):\mathbb{Z}_2)$	$(q+1)^2\times(q^2-1)^2$	$-$
9	$w_1w_2w_3w_5$	6	$\mathbb{Z}_3\times D_8$	$(q^2-1)\times(q+1)(q^3-1)$	$+$
10	$w_1w_5w_3w_6$	3	$\mathbb{Z}_3\times\mathrm{S}_3\times\mathrm{S}_3$	$(q-1)\times(q^2+q+1)\times(q^3-1)$	$+$
11	$w_1w_4w_6w_3$	4	$\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$	$(q^2-1)\times(q^4-1)$	$-$
12	$w_1w_4w_3w_2$	5	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5$	$(q-1)\times(q^5-1)$	$+$
13	$w_3w_2w_5w_4$	6	$\mathbb{Z}_6\times\mathrm{S}_3$	$(q^2-1)\times(q-1)(q^3+1)$	$+$
14	$w_3w_2w_4w_{14}$	4	$\mathrm{SL}_2(3):\mathbb{Z}_4$	$(q-1)(q^2+1)^2$	$\pm$
15	$w_1w_5w_3w_6w_2$	6	$\mathbb{Z}_6\times\mathrm{S}_3$	$(q^2+q+1)\times(q+1)(q^3-1)$	$+$
16	$w_1w_4w_6w_3w_{36}$	4	$\mathbb{Z}_4\times\mathrm{S}_4$	$(q+1)^2\times(q^4-1)$	$-$
17	$w_1w_4w_5w_3w_{36}$	10	$\mathbb{Z}_{10}$	$(q+1)(q^5-1)$	$+$
18	$w_1w_4w_6w_3w_5$	6	$\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_2$	$(q^2+q+1)\times(q-1)(q^3+1)$	$+$
19	$w_2w_5w_3w_4w_6$	8	$\mathbb{Z}_8$	$(q^2-1)(q^4+1)$	$+$
20	$w_{20}w_5w_4w_3w_2$	12	$\mathbb{Z}_{12}$	$(q-1)(q^2+1)(q^3+1)$	$+$
21	$w_1w_5w_2w_3w_6w_{36}$	3	$(((\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3):\mathbb{Z}_3):Q_8):\mathbb{Z}_3$	$(q^2+q+1)^3$	$+$
22	$w_1w_4w_6w_3w_5w_{36}$	6	$\mathbb{Z}_6\times\mathrm{S}_3$	$(q+1)\times(q^5+q^4+q^3+q^2+q+1)$	$+$
23	$w_1w_4w_6w_3w_2w_5$	12	$\mathbb{Z}_{12}$	$(q^2+q+1)(q^4-q^2+1)$	$+$
24	$w_1w_4w_{14}w_3w_2w_6$	9	$\mathbb{Z}_9$	(q^6+q^3+1)	$+$
25	$w_1w_4w_{14}w_3w_2w_{31}$	6	$\mathbb{Z}_3\times\mathrm{SL}_2(3)$	$(q^2-q+1)\times(q^4+q^2+1)$	$+$

Таблица 2: Расщепляемость нормализаторов максимальных торов группы $E_6^{\varepsilon}(q)$

Таблица 3: Поднятия для элементов группы Вейля в $E_7^{sc}(q)$

№	представитель w	$\|w\|$	поднятие для w	поднятие для ww_0
1	1	1	1	–
2	w_1	2	h_3n_1	–
3	w_1w_2	2	$h_3h_4n_1n_2$	–
4	w_3w_1	3	n_3n_1	–
5	$w_2w_3w_5$	2	$h_4n_2n_3n_5$	–
6	$w_1w_3w_5$	6	$h_4n_1n_3n_5$	–
7	$w_1w_3w_4$	4	$h_2n_1n_3n_4$	$h_2n_1n_3n_4n_0$
8	$w_1w_4w_6w_{53}$	2	$n_1n_4n_6n_{53}$	–
9	$w_1w_2w_3w_5$	6	$h_1h_4n_1n_2n_3n_5$	–
10	$w_1w_5w_3w_6$	3	$n_1n_5n_3n_6$	–
11	$w_1w_4w_6w_3$	4	$h_2n_1n_4n_6n_3$	$h_2n_1n_4n_6n_3n_0$
12	$w_1w_4w_3w_2$	5	$n_1n_4n_3n_2$	–
13	$w_3w_2w_5w_4$	6	$n_3n_2n_5n_4$	–
14	$w_3w_2w_4w_{16}$	4	$n_3n_2n_4n_{16}$	$n_3n_2n_4n_{16}n_0$
15	$w_1w_5w_3w_6w_2$	6	$h_4n_1n_5n_3n_6n_2$	–
16	$w_1w_4w_6w_3w_{53}$	4	$h_2n_1n_4n_6n_3n_{53}$	$h_2n_1n_4n_6n_3n_{53}n_0$
17	$w_1w_4w_5w_3w_{53}$	10	$h_2n_1n_4n_5n_3n_{53}$	–
18	$w_1w_4w_6w_3w_5$	6	$h_2n_1n_4n_6n_3n_5$	–
19	$w_2w_5w_3w_4w_6$	8	$n_2n_5n_3n_4n_6$	$n_2n_5n_3n_4n_6n_0$
20	$w_{23}w_5w_4w_3w_2$	12	$h_1n_{23}n_5n_4n_3n_2$	$h_1n_{23}n_5n_4n_3n_2n_0$
21	$w_1w_5w_2w_3w_6w_{53}$	3	$n_1n_5n_2n_3n_6n_{53}$	–
22	$w_1w_4w_6w_3w_5w_{53}$	6	$n_1n_4n_6n_3n_5n_{53}$	–
23	$w_1w_4w_6w_3w_2w_5$	12	$n_1n_4n_6n_3n_2n_5$	$n_1n_4n_6n_3n_2n_5n_0$
24	$w_1w_4w_{16}w_3w_2w_6$	9	$n_1n_4n_{16}n_3n_2n_6$	–
25	$w_1w_4w_{16}w_3w_2w_{40}$	6	$n_1n_4n_{16}n_3n_2n_{40}$	–
26	$w_1w_4w_6w_3w_7$	12	$h_2n_1n_4n_6n_3n_7$	$h_2n_1n_4n_6n_3n_7n_0$
27	$w_1w_4w_6w_2w_3w_7$	15	$n_1n_4n_6n_2n_3n_7$	–
28	$w_3w_2w_4w_{16}w_7$	4	$n_3n_2n_4n_{16}n_7$	$n_3n_2n_4n_{16}n_7n_0$
29	$w_1w_4w_6w_3w_5w_7$	7	$n_1n_4n_6n_3n_5n_7$	–
30	$w_{39}w_3w_5w_1w_4w_6$	8	$n_{39}n_3n_5n_1n_4n_6$	$n_{39}n_3n_5n_1n_4n_6n_0$

Таблица 7: Минимальные добавления к максимальным торам группы $F_4(q)$

№	w	$\lvert w\rvert$	Строение $C_W(w)$	Циклическое строение T	Доб.
1 (17)	1	1	$W(F_4) \simeq GO_4^+$	$(q-1)^4$	4
2 (9)	w_2	2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times S_4$	$(q-1)^2 \times (q^2-1)$	4/8
3 (10)	w_3	2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times S_4$	$(q-1)^2 \times (q^2-1)$	2
4	w_6w_3	2	$D_8 \times D_8$	$(q-1) \times (q+1) \times (q^2-1)$	4
5	$w_{16}w_3$	2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$(q^2-1)^2$	2
6 (21)	w_2w_1	3	$\mathbb{Z}_6 \times S_3$	$(q-1) \times (q^3-1)$	1
7 (20)	w_3w_4	3	$\mathbb{Z}_6 \times S_3$	$(q-1) \times (q^3-1)$	1
8 (19)	w_3w_2	4	$\mathbb{Z}_4 \times D_8$	$(q-1) \times (q^2+1)(q-1)$	2
9 (2)	$w_{21}w_8w_2$	2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times S_4$	$(q^2-1) \times (q+1)^2$	4/8
10 (3)	$w_8w_6w_3$	2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times S_4$	$(q^2-1) \times (q+1)^2$	2
11	$w_2w_1w_{16}$	4	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$(q-1,2) \times \dfrac{(q^4-1)}{(q-1,2)}$	2
12	$w_{16}w_3w_2$	4	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$(q-1,2) \times \dfrac{(q^4-1)}{(q-1,2)}$	2
13 (15)	$w_3w_2w_7$	6	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	$(q-1)(q^3+1)$	1
14 (16)	$w_3w_2w_1$	6	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	$(q-1)(q^3+1)$	1
15 (13)	$w_{16}w_3w_{12}$	6	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	$(q+1)(q^3-1)$	1
16 (14)	$w_{21}w_2w_1$	6	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$	$(q+1)(q^3-1)$	1
17 (1)	$w_{21}w_8w_6w_3$	2	$W(F_4) \simeq GO_4^+$	$(q+1)^4$	4
18 (25)	$w_{21}w_2w_1w_{19}$	3	$\mathbb{Z}_3 \times \mathrm{SL}_2(3)$	$(q^2+q+1)^2$	1
19 (8)	$w_{21}w_8w_3w_2$	4	$\mathbb{Z}_4 \times D_8$	$(q^2+1)(q+1) \times (q+1)$	2
20 (7)	$w_{21}w_8w_3w_{10}$	6	$\mathbb{Z}_6 \times S_3$	$(q^3+1) \times (q+1)$	1
21 (6)	$w_6w_1w_{16}w_3$	6	$\mathbb{Z}_6 \times S_3$	$(q^3+1) \times (q+1)$	1
22	$w_8w_{16}w_3w_2$	4	$\mathrm{SL}_2(3) : \mathbb{Z}_4$	$(q^2+1)^2$	4
23	$w_3w_2w_1w_{16}$	8	$\mathbb{Z}_8$	(q^4+1)	1
24	$w_8w_1w_2w_4$	12	$\mathbb{Z}_{12}$	(q^4-q^2+1)	1
25 (18)	$w_6w_1w_9w_4$	6	$\mathbb{Z}_3 \times \mathrm{SL}_2(3)$	$(q^2-q+1)^2$	1

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 62-98
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 62-98

Таблица 8: Поднятия для элементов группы Вейля в $F_4(q)$

w	$\|w\|$	поднятие порядка $\|w\|$	условие
1	1	1	
w_2	2	h_1n_2	
w_3	2	h_2n_3	
w_6w_3	2	$h_1n_6n_3$	
$w_{16}w_3$	2	$h_1h_2n_{16}n_3$	
w_2w_1	3	n_2n_1	
w_3w_4	3	n_3n_4	
w_3w_2	4	$(\zeta^{q^2+1}, \zeta^{q+1}, \zeta, 1)n_3n_2$, $\zeta^{2(q^2+1)} = -1$	$q \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)$
$w_{21}w_8w_2$	2	$h_1n_2n_0$	
$w_8w_6w_3$	2	$h_2n_3n_0$	
$w_2w_1w_{16}$	4	$(\zeta^{q^3+1}, -\zeta^{1-q}, \zeta^{\frac{-q^3-q^2-q+1}{2}}, \zeta)n_2n_1n_{16}$, $\zeta^{q^3+q^2+q+1} = -1$	$q \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)$
$w_{16}w_3w_2$	4	–	
$w_3w_2w_7$	6	$h_1n_3n_2n_7$	
$w_3w_2w_1$	6	$n_3n_2n_1$	
$w_{16}w_3w_{12}$	6	$h_1n_3n_2n_7n_0$	
$w_{21}w_2w_1$	6	$n_3n_2n_1n_0$	
$w_{21}w_8w_6w_3$	2	n_0	
$w_{21}w_2w_1w_{19}$	3	$n_{21}n_2n_1n_{19}$	
$w_{21}w_8w_3w_2$	4	–	
$w_{21}w_8w_3w_{10}$	6	$n_3n_4n_0$	
$w_6w_1w_{16}w_3$	6	$n_2n_1n_0$	
$w_8w_{16}w_3w_2$	4	$n_8n_{16}n_3n_2$	
$w_3w_2w_1w_{16}$	8	$n_3n_2n_1n_{16}$	
$w_8w_1w_2w_4$	12	$n_8n_1n_2n_4$	
$w_6w_1w_9w_4$	6	$n_6n_1n_9n_4$	

Таблица 9: Расщепляемость нормализаторов максимальных торов группы $G_2(q)$

№	w	$\lvert w\rvert$	Строение $C_W(w)$	Цикл. строение T	Доп.
1	1	1	D_{12}	$(q-1)^2$	+
2	w_2	2	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$	q^2-1	+
3	w_4	2	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$	q^2-1	+
4	w_1w_6	2	D_{12}	$(q+1)^2$	+
5	w_1w_3	3	$\mathbb{Z}_6$	q^2+q+1	+
6	w_1w_5	6	$\mathbb{Z}_6$	q^2-q+1	+

Таблица 10: Расщепляемость нормализаторов максимальных торов группы ${}^2G_2(q)$

№	w	Циклическое строение T	$C_{W,\sigma}(w)$	Доп.
1	$1\sim(w_1w_2)^k$	$\{(z,z^{\sqrt{3q}})\mid z^{q-1}=1\}$ $T\simeq q-1$	$\mathbb{Z}_2$	+
2	$w_1\sim w_2$	$\{(z,z^{\sqrt{3q}})\mid z^{q-\sqrt{3q}+1}=1\}$ $T\simeq q-\sqrt{3q}+1$	$\mathbb{Z}_6$	+
3	$w_3\sim w_5$	$\{(t_1,t_2)\mid t_1=\pm t_2^{(\sqrt{q/3}-1)/2}, t_2^{(q+1)/2}=1\}$ $T\simeq \mathbb{Z}_2\times\frac{q+1}{2}$	$\mathbb{Z}_6$	+
4	$w_4\sim w_6$	$\{(z,z^{-\sqrt{3q}})\mid z^{q+\sqrt{3q}+1}=1\}$ $T\simeq q+\sqrt{3q}+1$	$\mathbb{Z}_6$	+

Таблица 11: Расщепляемость нормализаторов максимальных торов группы ${}^3D_4(q)$

№	w	$\lvert w\rvert$	$C_{W,\sigma}(w)$	Циклическое строение T	Доп.
1	1	1	D_{12}	$\{(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2}) \mid t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1\}$ $T \simeq (q^3-1) \times (q-1)$	$+$
2	w_{12}	2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\{(t, t^{1-q^3}, t^{q^4}, t^{q^2}) \mid t^{(q^3-1)(q+1)} = 1\}$ $T \simeq (q^3-1)(q+1)$	$+$
3	w_0w_{12}	2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\{(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2}) \mid t^{(q^3+1)(q-1)} = 1\}$ $T \simeq (q^3+1)(q-1)$	$+$
4	$w_{12}w_2$	3	$\mathrm{SL}_2(3)$	$\{(t_1, t_2, t_1^q t_2, (t_1^{-1}t_2)^{q+1}) \mid t_i^{q^2+q+1} = 1\}$ $T \simeq (q^2+q+1) \times (q^2+q+1)$	$+$
5	$w_0w_{12}w_2$	3	$\mathrm{SL}_2(3)$	$\{(t_1, t_2, t_1^{-q} t_2, (t_1 t_2^{-1})^{q-1}) \mid t_i^{q^2-q+1} = 1\}$ $T \simeq (q^2-q+1) \times (q^2-q+1)$	$+$
6	w_1w_2	3	$\mathbb{Z}_4$	$\{(t, t^{q^3+1}, t^q, t^{q^2}) \mid t^{q^4-q^2+1} = 1\}$ $T \simeq q^4-q^2+1$	$+$
7	w_0	2	D_{12}	$\{(t_1, t_2, t_1^{-q}, t_1^{q^2}) \mid t_1^{q^3+1} = t_2^{q+1} = 1\}$ $T \simeq (q^3+1) \times (q+1)$	$+$

§ 6. Открытые проблемы

Как следует из таблицы 1 для многих алгебраических групп, определенных над полем нечетной характеристики, максимальные торы не имеют дополнения в своих нормализаторах. Возникает естественный вопрос о том, каково минимальное добавление для максимальных торов в этих случаях. Отметим, что в работе [37] найдены добавления для максимального тора в своем нормализаторе, удовлетворяющие соотношениям группы кос, в случае почти простых связных редуктивных групп над алгебраически замкнутым полем. В работе [38] предложены явные конструкции добавления для максимального тора в своем нормализаторе для классических групп Ли. Тем не менее, никакой речи о минимальности посторенных добавлений в этих работах не идет.

Проблема 3. *Для простых алгебраических групп $\overline{G}$ найти добавление минимального порядка для максимального тора $\overline{T}$ в нормализаторе $N_{\overline{G}}(\overline{T})$.*

Как и в случае проблем 1 и 2 при переходе к конечным группам лиева типа проблема становится намного более сложной, поскольку максимальные торы не обязаны быть сопряженными.

Проблема 4. *Для конечных простых групп G лиева типа найти добавление минимального порядка для каждого максимального тора T в алгебраическом нормализаторе $N(G,T)$.*

Данная проблема решена только в случае конечных групп лиева типа F_4 (см. теорему 4.7 или таблицу 7).

Для всех исключительных групп лиева типа найдены минимальные порядки поднятий элементов группы Вейля в алгебраическом нормализаторе $N(G,T)$. Аналогичный вопрос для классических групп остается открытым.

Проблема 5. *Найти минимальные порядки поднятий элементов группы Вейля в $N_{\overline{G}}(\overline{T})$ и в $N(G,T)$ для классических групп $\overline{G}$ и G соответственно.*

В случае простых исключительных групп из следствия 4.10 видна тесная связь между расщепляемостью нормализатора максимального тора и делимостью порядка элемента w на 4.

Проблема 6. *Найти общее доказательство следствия 4.10 (или отдельных его пунктов), не включающее рассмотрение всех классов сопряженности максимальных торов.*

Список литературы

1. *Carter R. W. Finite groups of Lie type: conjugacy classes and complex characters.* New York etc.: John Wiley and Sons, 1985.

2. *Carter R. W.* Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type // *Proc. Lond. Math. Soc.* 1978. V. 37. P. 491–507.

3. *Carter R. W.* Centralizers of semisimple elements in the finite classical groups // *Proc. Lond. Math. Soc.* 1981. V. 42, N 1. P. 1–41.

4. *Бутурлакин А. А., Гречкосеева М. А.* Циклическое строение максимальных торов в конечных классических группах // *Алгебра и логика.* 2007. Т. 46, № 2. С. 129–156.

5. *Deriziotis D. I., Fakiolas A. P.* The maximal tori in the finite Chevalley groups of type E_6, E_7 and E_8 // *Comm. Algebra.* 1991. V. 19, N 3. P. 889–903.

6. *Deriziotis D. I., Michler G. O.* Character table and blocks of finite simple triality groups ${}^3D_4(q)$ // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1987. V. 303, N 1. P. 39–70.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 62-98
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 62-98

7. *Shinoda K.*The conjugacy classes of Chevalley groups of type F_4 over finite fields of characteristic 2 // *Journal Of The Faculty Of Science, The University Of Tokyo.* 1974. V. 21. P. 133–159.

8. *Shinoda K.* The conjugacy classes of the finite Ree groups of type F_4 // *Journal Of The Faculty Of Science, The University Of Tokyo.* 1975. V. 22. P. 1–15.

9. *Shoji T.* The conjugacy classes of Chevalley groups of type F_4 over finite fields of characteristic $p \neq 2$ // *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.* 1974. V. 21. P. 1–17.

10. *Lawther R.* The action of $F_4(q)$ on cosets of $B_4(q)$ // *J. Algebra.* 1999. V. 212. P. 79–118.

11. *Fleischmann P., Janiszczak I.* The semisimple conjugacy classes of finite groups of Lie type E_6 and E_7 // *Comm. Algebra.* 1993. V. 21, N 1. P. 93–161.

12. *Fleischmann P., Janiszczak I.* The semisimple conjugacy classes and the generic class number of the finite simple groups of Lie type E_8 // *Comm. Algebra.* 1994. V. 22, N 6. P. 2221–2303.

13. *W. M. Kantor W. M., Seress A.* Prime power graphs for groups of Lie type // *J. Algebra.* 2002. V. 247. P. 370–434.

14. *Gager P. Maximal tori in finite groups of Lie type.* PhD Thesis, University of Warwick, 1973.

15. *Malle G., Testerman D. Linear Algebraic Groups and Finite Groups of Lie Type.* Cambridge University Press, 2011.

16. *Tits J.* Normalisateurs de tores I. Groupes de Coxeter Étendus // *J. Algebra.* 1966. V. 4. P. 96–116.

17. *Curtis M., Wiederhold A., Williams B.* Normalizers of maximal tori, Localization in group theory and homotopy theory, and related topics // *Sympos., Battelle Seattle Res. Center, Seattle, Wash., Springer, Berlin, Lecture Notes in Math.* 1974. V. 418. P. 31–47.

18. *Adams J., He X.* Lifting of elements of Weyl groups // *J. Algebra.* 2017. V. 485. P. 142–165.

19. *Zaremsky Matthew C. B.* Representatives of elliptic Weyl group elements in algebraic groups // *J. Group Theory.* 2014. V. 17, N 1. P. 49–71.

20. *Reeder M., Levy P., Yu J.-K., Gross B. H.* Gradings of positive rank on simple Lie algebras // *Transform. Groups.* 2012. V. 17, N 4. P. 1123–1190.

21. *Lusztig G.* Lifting involutions in a Weyl group to the torus normalizer // *Represent. Th.* 2018. V. 22. P. 27–44.

22. *Adrian M.* Lifting involutions in a Weyl group to the normalizer of the torus // *Proc. Amer. Math. Soc.* 2022. V. 150, N 11. P. 4989–4994.

23. *Хамфри Дж. Линейные алгебраические группы.* Москва: «Наука», 1980.

24. *Кондратьев А. С.* Подгруппы конечных групп Шевалле // *Успехи матем. н.* 1986. Т. 41, № 1. С. 57–96.

25. *Carter R. W. Simple groups of Lie type.* London etc.: John Wiley and Sons, 1972.

26. *Vavilov N. A.* Do it yourself structure constants for Lie algebras of types E_l // *J. Math. Sci. (N.Y.).* 2004. V. 120, N 4. P. 1513–1548.

27. *Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Chapter A. Almost simple K-groups.* Mathematical Surveys and Monographs, 40, N. 3, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

28. *Baykalov A. A.* On algebraic normalisers of maximal tori in simple groups of Lie type // *Journal of Group Theory.* 2024. https://doi.org/10.1515/jgth-2023-0070.

29. *Гальт А. А.* О расщепляемости нормализатора максимального тора в симплектических группах // *Известия РАН. Сер. матем.* 2014. Т. 78, № 3. С. 19–34.

30. *Galt A. A.* On splitting of the normalizer of a maximal torus in linear groups // *J. Algebra Appl.* 2015. V. 14, N 7. 1550114 (20 pages).

31. *Гальт А. А., Старолетов А. М.* О расщепляемости нормализаторов максимальных торов в конечных группах лиева типа // *Алгебра и логика.* 2023. Т. 62, № 1. С. 33–58.

32. *Galt A. A.* On splitting of the normalizer of a maximal torus in orthogonal groups // *J. Algebra Appl.* 2017. V. 16, N 9. 1750174 (23 pages).

33. *Гальт А. А.* О расщепляемости нормализатора максимального тора в исключительных линейных алгебраических группах // *Известия РАН. Сер. матем.* 2017. Т. 81, № 2. С. 35–52.

34. *Galt A. A., Staroletov A. M.* On splitting of the normalizer of a maximal Torus in $E_6(q)$ // *Algebra Colloq.* 2019. V. 26, N 2. P. 329–350.

35. *Гальт А. А., Старолетов А. М.* О расщепляемости нормализаторов максимальных торов в группах $E_7(q)$ и $E_8(q)$ // *Матем. тр.* 2021. Т. 24, № 1. С. 52–101.

36. *Гальт А. А., Старолетов А. М.* Минимальные добавления к максимальным торам в их нормализаторах для групп $F_4(q)$ // *Известия РАН. Сер. матем.* 2022. Т. 86, № 1. С. 134–159.

37. *Adrian M.* The Sections of the Weyl Group // *Int. Math. Res. Not.* 2022. V. 10. P. 7654–7693.

38. *Герасимов А. А., Лебедев Д. Р., Облезин С. В.* Нормализаторы максимальных торов в классических группах Ли // *Алгебра и анализ.* 2023. Т. 35, № 2. С. 1–54.

References

1. *Carter R. W. Finite groups of Lie type: conjugacy classes and complex characters.* New York etc.: John Wiley and Sons, 1985.

2. *Carter R. W.* Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type // *Proc. Lond. Math. Soc.* 1978. V. 37. P. 491–507.

3. *Carter R. W.* Centralizers of semisimple elements in the finite classical groups // *Proc. Lond. Math. Soc.* 1981. V. 42, N 1. P. 1–41.

4. *Buturlakin A. A., Grechkoseeva M. A.* The cyclic structure of maximal tori of the finite classical groups // *Algebra and Logic.* 2007. V. 46, N 2. P. 73–89.

5. *Deriziotis D. I., Fakiolas A. P.* The maximal tori in the finite Chevalley groups of type E_6, E_7 and E_8 // *Comm. Algebra.* 1991. V. 19, N 3. P. 889–903.

6. *Deriziotis D. I., Michler G. O.* Character table and blocks of finite simple triality groups ${}^3D_4(q)$ // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1987. V. 303, N 1. P. 39–70.

7. *Shinoda K.*The conjugacy classes of Chevalley groups of type F_4 over finite fields of characteristic 2 // *Journal Of The Faculty Of Science, The University Of Tokyo.* 1974. V. 21. P. 133–159.

8. *Shinoda K.* The conjugacy classes of the finite Ree groups of type F_4 // *Journal Of The Faculty Of Science, The University Of Tokyo.* 1975. V. 22. P. 1–15.

9. *Shoji T.* The conjugacy classes of Chevalley groups of type F_4 over finite fields of characteristic $p \neq 2$ // *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.* 1974. V. 21. P. 1–17.

10. *Lawther R.* The action of $F_4(q)$ on cosets of $B_4(q)$ // *J. Algebra.* 1999. V. 212. P. 79–118.

11. *Fleischmann P., Janiszczak I.* The semisimple conjugacy classes of finite groups of Lie type E_6 and E_7 // *Comm. Algebra.* 1993. V. 21, N 1. P. 93–161.

12. *Fleischmann P., Janiszczak I.* The semisimple conjugacy classes and the generic class number of the finite simple groups of Lie type E_8 // *Comm. Algebra.* 1994. V. 22, N 6. P. 2221–2303.

13. *W. M. Kantor W. M., Seress A.* Prime power graphs for groups of Lie type // *J. Algebra.* 2002. V. 247. P. 370–434.

14. *Gager P. Maximal tori in finite groups of Lie type.* PhD Thesis, University of Warwick, 1973.

15. *Malle G., Testerman D. Linear Algebraic Groups and Finite Groups of Lie Type.* Cambridge University Press, 2011.

16. *Tits J.* Normalisateurs de tores I. Groupes de Coxeter Étendus // *J. Algebra.* 1966. V. 4. P. 96–116.

17. *Curtis M., Wiederhold A., Williams B.* Normalizers of maximal tori, Localization in group theory and homotopy theory, and related topics // *Sympos., Battelle Seattle Res. Center, Seattle, Wash., Springer, Berlin, Lecture Notes in Math.* 1974. V. 418. P. 31–47.

18. *Adams J., He X.* Lifting of elements of Weyl groups // *J. Algebra.* 2017. V. 485. P. 142–165.

19. *Zaremsky Matthew C. B.* Representatives of elliptic Weyl group elements in algebraic groups // *J. Group Theory.* 2014. V. 17, N 1. P. 49–71.

20. *Reeder M., Levy P., Yu J.-K., Gross B. H.* Gradings of positive rank on simple Lie algebras // *Transform. Groups.* 2012. V. 17, N 4. P. 1123–1190.

21. *Lusztig G.* Lifting involutions in a Weyl group to the torus normalizer // *Represent. Th.* 2018. V. 22. P. 27–44.

22. *Adrian M.* Lifting involutions in a Weyl group to the normalizer of the torus // *Proc. Amer. Math. Soc.* 2022. V. 150, N 11. P. 4989–4994.

23. *Humphreys J. Linear Algebraic Groups.* Springer New York, NY, 1975.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 62-98
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 62-98

24. *Kondrat'ev A. S.* Subgroups of finite Chevalley groups // *Russian Math. Surveys.* 1986. V. 41, N 1. P. 65–118.

25. *Carter R. W. Simple groups of Lie type.* London etc.: John Wiley and Sons, 1972.

26. *Vavilov N. A.* Do it yourself structure constants for Lie algebras of types E_l // *J. Math. Sci. (N.Y.).* 2004. V. 120, N 4. P. 1513–1548.

27. *Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Chapter A. Almost simple K-groups.* Mathematical Surveys and Monographs, 40, N. 3, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

28. *Baykalov A. A.* On algebraic normalisers of maximal tori in simple groups of Lie type // *Journal of Group Theory.* 2024. https://doi.org/10.1515/jgth-2023-0070.

29. *Gal't A. A.* On the splitting of the normalizer of a maximal torus in symplectic groups // *Izv. Math.* 2014. V. 78, N 3. P. 443–458.

30. *Galt A. A.* On splitting of the normalizer of a maximal torus in linear groups // *J. Algebra Appl.* 2015. V. 14, N 7. 1550114 (20 pages).

31. *Galt A. A., Staroletov A. M.* Splitting of Normalizers of Maximal Tori in Finite Groups of Lie Type // *Algebra and Logic.* 2023. V. 62, N 1. P. 22–40.

32. *Galt A. A.* On splitting of the normalizer of a maximal torus in orthogonal groups // *J. Algebra Appl.* 2017. V. 16, N 9. 1750174 (23 pages).

33. *Gal't A. A.* On the splitting of the normalizer of a maximal torus in the exceptional linear algebraic groups // *Izv. Math.* 2017. V. 81, N 2. P. 269–285.

34. *Galt A. A., Staroletov A. M.* On splitting of the normalizer of a maximal Torus in $E_6(q)$ // *Algebra Colloq.* 2019. V. 26, N 2. P. 329–350.

35. *Galt A. A., Staroletov A. M.* On Splitting of the Normalizer of a Maximal Torus in $E_7(q)$ and $E_8(q)$ // *Sib. Adv. Math.* 2021. V. 31, N 4. P. 244–282.

36. *Galt A. A., Staroletov A. M.* Minimal supplements of maximal tori in their normalizers for the groups $F_4(q)$ // *Izv. Math.* 2022. V. 86, N 1. P. 126–149.

37. *Adrian M.* The Sections of the Weyl Group // *Int. Math. Res. Not.* 2022. V. 10. P. 7654–7693.

38. *Gerasimov, A. A., Lebedev D. R., Oblezin S. V.* Normalizers of maximal tori in classical Lie groups // *Algebra i Analiz.* 2023. V. 35, N 2. P. 1–54.

Информация об авторе

Алексей Альбертович Гальт, кандидат физико-математических наук, доцент

AuthorID: 521729

Scopus Author ID 23972609500

Author Information

Alexey A. Galt, Candidate of Mathematics, Associate Professor

AuthorID: 521729

Scopus Author ID 23972609500

Статья поступила в редакцию 10.06.2024;
одобрена после рецензирования 12.06.2024; принята к публикации 13.06.2024

The article was submitted 10.06.2024;
approved after reviewing 12.06.2024; accepted for publication 13.06.2024